गणित

कक्षा 8

राजकीय विद्यालयों में नि:शुल्क वितरण हेतु

राजस्थान राज्य शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण संस्थान, उदयपुर

प्रकाशक

राजस्थान राज्य पाठ्यपुस्तक मण्डल, जयपुर

संस्करण : 2016

© राजस्थान राज्य शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण संस्थान, उदयपुर
© राजस्थान राज्य पाठ्यपुस्तक मण्डल, जयपुर

मूल्य :

पेपर उपयोग : आर. एस. टी. बी. वाटरमार्क
80 जी. एस. एम. पेपर पर मुद्रित

प्रकाशक : **राजस्थान राज्य पाठ्यपुस्तक मण्डल**
2-2 ए, झालाना डूंगरी, जयपुर

मुद्रक :

मुद्रण संख्या :

सर्वाधिकार सुरक्षित

- प्रकाशक की पूर्व अनुमति के बिना इस प्रकाशन के किसी भाग को छापना तथा इलैक्ट्रानिकी, मशीनी, फोटोप्रतिलिपि, रिकॉर्डिंग अथवा किसी अन्य विधि से पुनः प्रयोग पद्धति द्वारा उसका संग्रहण अथवा प्रसारण वर्जित है।
- इस पुस्तक की बिक्री इस शर्त के साथ की गई है कि प्रकाशक की पूर्व अनुमति के बिना यह पुस्तक अपने मूल आवरण अथवा जिल्द के अलावा किसी अन्य प्रकार से व्यापार द्वारा उधारी पर, पुनर्विक्रय या किराए पर न दी जाएगी, न बेची जाएगी।
- इस प्रकाशन का सही मूल्य इस पृष्ठ पर मुद्रित है। रबड़ की मुहर अथवा चिपकाई गई पर्ची (स्टिकर) या किसी अन्य विधि द्वारा अंकित कोई भी संशोधित मूल्य गलत है तथा मान्य नहीं होगा।
- किसी भी प्रकार का कोई परिवर्तन केवल प्रकाशक द्वारा ही किया जा सकेगा।

पाठ्यपुस्तक निर्माण
वित्तीय सहयोगः
यूनिसेफ राजस्थान, जयपुर

प्राक्कथन

बदलती हुई परिस्थितियों के अनुरूप शिक्षा में परिवर्तन होना जरूरी है, तभी विकास की गति तेज होती है। विकास में सहायक कई तत्त्वों के अलावा शिक्षा भी एक प्रमुख तत्त्व है। विद्यालयी शिक्षा को प्रभावशाली बनाने के लिए पाठ्यचर्या को समय–समय पर बदलना एक आवश्यक कदम है। वर्तमान में राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा 2005 तथा निःशुल्क एवं अनिवार्य बाल शिक्षा अधिकार अधिनियम 2009 के द्वारा यह स्पष्ट है कि समस्त शिक्षण क्रियाओं में 'बालक' केन्द्र के रूप में हैं। हमारी सिखाने की प्रक्रिया इस प्रकार हो कि बालक स्वयं अपने अनुभवों के आधार पर समझ कर ज्ञान का निर्माण करें। उसके सीखने की प्रक्रिया को ज्यादा से ज्यादा स्वतंत्रता दी जाए, इसके लिए शिक्षक एक सहयोगी के रूप में कार्य करें। पाठ्यचर्या को सही रूप में पहुँचाने के लिए पाठ्यपुस्तक महत्त्वपूर्ण साधन है। अतः बदलती पाठ्यचर्या के अनुरूप ही पाठ्यपुस्तकों में परिवर्तन कर राज्य सरकार द्वारा नवीन पाठ्यपुस्तक तैयार कराई गई है।

पाठ्यपुस्तक तैयार करने में यह ध्यान रखा गया है कि पाठ्यपुस्तक सरल, सुगम, सुरुचिपूर्ण, सुग्राह्य एवं आकर्षक हो, जिससे बालक सरल भाषा, चित्रों एवं विभिन्न गतिविधियों के माध्यम से इनमें उपलब्ध ज्ञान को आत्मसात् कर सके। साथ ही वह अपने सामाजिक एवं स्थानीय परिवेश से जुड़े तथा ऐतिहासिक एवं सांस्कृतिक गौरव, संवैधानिक मूल्यों के प्रति समझ एवं निष्ठा बनाते हुए एक अच्छे नागरिक के रूप में अपने आप को स्थापित कर सके।

शिक्षकों से मेरा विशेष आग्रह है कि इस पुस्तक को पूर्ण कराने तक ही सीमित नहीं रखें, अपितु पाठ्यक्रम एवं अपने अनुभव को आधार बना कर इस प्रकार प्रस्तुत करें कि बालक को सीखने के पर्याप्त अवसर मिले एवं विषय शिक्षण के उद्देश्यों की प्राप्ति की जा सके।

राजस्थान राज्य शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण संस्थान (एस.आई.ई.आर.टी.) उदयपुर पाठ्यपुस्तक विकास में सहयोग के लिए उन समस्त राजकीय एवं निजी संस्थानों, संगठनों यथा एन.सी.ई.आर.टी., नई दिल्ली, राज्य सरकार, भारतीय जनगणना विभाग, आहड़ संग्रहालय उदयपुर, जनसंपर्क निदेशालय जयपुर, राजस्थान राज्य पाठ्यपुस्तक मण्डल जयपुर, विद्या भारती, विद्याभवन संदर्भ केन्द्र पुस्तकालय, उदयपुरएवं लेखकों,समाचार पत्र–पत्रिकाओं, प्रकाशकों तथा विभिन्न वेबसाइट्स के प्रति आभार व्यक्त करता है जिन्होंने पाठ्यपुस्तक निर्माण में सामग्री उपलब्ध कराने एवं चयन में सहयोग दिया। हमारे प्रयासों के बावजूद किसी लेखक, प्रकाशक, संस्था, संगठन और वेबसाइट का नाम छूट गया हो तो हम उनके आभारी रहते हुए क्षमा प्रार्थी हैं। इस संबंध में जानकारी प्राप्त होने पर आगामी संस्करणों में उनका नाम शामिल कर लिया जाएगा।

पाठ्यपुस्तकों की गुणवत्ता बढ़ाने हेतु श्री कुंजीलाल मीणा, शासन सचिव, प्रारंभिक शिक्षा, श्री नरेशपाल गंगवार, शासन सचिव, माध्यमिक शिक्षा एवं आयुक्त राष्ट्रीय माध्यमिक शिक्षा परिषद्, श्री बाबूलाल मीणा, निदेशक प्रारंभिक शिक्षा एवं श्री सुवालाल, निदेशक माध्यमिक शिक्षा, श्री बी. एल. जाटावत, आयुक्त, राजस्थान प्रारम्भिक शिक्षा परिषद्, जयपुर, राजस्थान सरकार का सतत् मार्गदर्शन एवं अमूल्य सुझाव संस्थान को प्राप्त होते रहे हैं। अतः संस्थान हृदय से आभार व्यक्त करता है।

इस पाठ्यपुस्तक का निर्माण यूनिसेफ के वित्तीय एवं तकनीकी सहयोग से किया गया है। इसमें सेम्युअल एम., चीफ यूनिसेफ राजस्थान जयपुर, सुलग्ना रॉय शिक्षा विशेषज्ञ एवं यूनिसेफ से संबंधित अन्य सभी अधिकारियों के सहयोग के लिए संस्थान आभारी है। संस्थान उन सभी अधिकारियों एवं कार्मिकों का, जिनका प्रत्यक्ष एवं अप्रत्यक्ष रूप से इस कार्य संपादन में सहयोग रहा है, उनकी प्रशंसा करता है।

मुझे इस पुस्तक को प्रस्तुत करते हुए प्रसन्नता हो रही है, साथ ही यह विश्वास है कि यह पाठ्यपुस्तक विद्यार्थियों एवं शिक्षकों के लिए उपयोगी सिद्ध होगी और अध्ययन–अध्यापन एवं विद्यार्थी के व्यक्तित्व विकास की एक प्रभावशाली कड़ी के रूप में कार्य करेगी।

विचारों एवं सुझावों को महत्त्व देना लोकतंत्र का गुण है अतः राजस्थान राज्य शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण संस्थान उदयपुर सदैव इस पुस्तक को और श्रेष्ठ एवं गुणवत्तापूर्ण बनाने के लिए आपके बहुमूल्य सुझावों का स्वागत करेगा।

निदेशक
राजस्थान राज्य शैक्षिक अनुसंधान एवं
प्रशिक्षण संस्थान, उदयपुर

पाठ्यपुस्तक निर्माण समिति

संरक्षक : विनीता बोहरा, निदेशक, राजस्थान राज्य शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण संस्थान (एस.आई.ई.आर.टी.,) उदयपुर

मुख्य समन्वयकः नारायण लाल प्रजापत, उपनिदेशक, एस.आई.ई.आर.टी., उदयपुर

समन्वयकः डॉ. ममता बोल्या, अनुसंधान सहायक, एस.आई.ई.आर.टी., उदयपुर

संयोजकः उमंग पण्ड्या, वरिष्ठ अध्यापक, रा.मा.वि. वाका, बाँसवाड़ा

लेखकगणः रूपेन्द्र मोहन शर्मा, जिला सचिव, विद्या भारती, बा.उ.मा. आदर्श विद्या मंदिर, दौसा

ओंकार दास वैष्णव, से.नि. प्रधानाचार्य, चित्तौड़गढ़

रणवीर सिंह, उपप्रधानाचार्य, डाइट, कोटा

लालाराम सेन, वरि. व्या., डाइट, जालोर

सुशीला मेनारिया, व्या., डाइट, उदयपुर

डॉ. रेखा शर्मा, व्या., रा.बा.उ.मा.वि. झाड़ोल, फलासिया

संजय बोल्या, व.अ.,रा.उ.मा.वि. छाली, गोगुन्दा, उदयपुर

कमलकान्त स्वामी, व.अ.,रा.उ.मा.वि. सर्वोदय बस्ती, बीकानेर

कौशल डी. पण्ड्या, कार्यक्रम अधिकारी, रमसा, बाँसवाड़ा

जनक जोशी, ब्लॉक संदर्भ्य व्यक्ति, एस.एस.ए.,घाटोल, बाँसवाड़ा

महेन्द्र सोनी, व.अ.,रा.मा.वि. बुद्धनगर, जोधपुर

कमल अरोड़ा, व.अ.,रा.मा.वि. झाड़ोली, गोगुन्दा, उदयपुर

रियाज अहमद, व.अ., रा.उ.मा.वि. बाड़ी, धौलपुर

यशवन्त दवे, व.अ.,रा.उ.मा.वि. बम्बोरा, उदयपुर

सीमा मेहता, व.अ.,रा.उ.मा.वि. रावलिया खुर्द, गोगुन्दा

शहनाज, अध्या.,रा.उ.प्रा.वि. गाडरियावास, भीण्डर

बृजराज चौधरी, अध्या.,रा.उ.प्रा.वि. भटवाड़ा, खैराबाद, कोटा

कपिल पुरोहित, अध्या.,रा.उ.प्रा.वि. सिवड़िया, गोगुन्दा, उदयपुर

दुर्गेश कुमार जोशी, अध्या.,रा.उ.प्रा.वि. उदलियास (माफी), भीलवाडा

कल्याण सिंह पंवार, अध्या.,रा.उ.प्रा.वि. भीमाखेड़ा, रेलमगरा, राजसमंद

आवरण एवं सज्जाः डॉ. जगदीश कुमावत, प्राध्यापक, एस.आई.ई.आर.टी., उदयपुर

चित्रांकनः शाहिद मोहम्मद, अजमेर

तकनीकी सहयोगः हेमन्त आमेटा, व्याख्याता, एस.आई.ई.आर.टी. उदयपुर

कम्प्यूटर ग्राफिक्सः अनुभव ग्राफिक, अजमेर

नि:शुल्क वितरण हेतु

शिक्षकों के लिए

वर्तमान वैश्विक परिदृश्य में बदलते परिवेश के साथ गणित शिक्षण का सामन्जस्य बिठाने एवं राज्य के विद्यार्थियों को अधिगम के उन स्तरों तक दक्षता प्रदान करने के लिए नवीन पाठ्यक्रम एवं पाठ्यपुस्तकों का निर्माण किया गया हैं।

बालक की शैक्षिक जगत के प्रति समझ विकसित करने के साथ–साथ बालक की अन्तर्निहित क्षमताओं को विकसित करने, उच्च मानवीय मूल्यों व नैतिक गुणों का विकास करने, राष्ट्र के लिए भविष्य में निष्ठावान, देशभक्त एवं संवेदनशील नागरिक तैयार करने के उद्देश्य से इस पाठ्यक्रम का सृजन किया गया हैं।
राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रुपरेखा–2005 के मुख्य मार्ग–दर्शक सिद्धान्तों को शिक्षक आत्मसात कर उनकी मूल भावना के अनुरुप पाठ्यपुस्तक की विषयवस्तु को बालकों तक पहुँचाए, शिक्षक से यह अपेक्षा की गई है।

इस पाठ्यपुस्तक की प्रमुख विशेषताएँ निम्नलिखित है– विद्यार्थियों को विषय से परिचय उनके आसपास से संबंधित उदाहरणों से कराया गया हैं। इसमें यह भी ध्यान रखा गया है कि अधिगम हेतु आवश्यक सामग्री कम लागत या आसपास के परिवेश से उपलब्ध हो सके ताकि कक्षा शिक्षण में अध्यापक उन सामग्रियों का उपयोग कर, गतिविधि के माध्यम से बालकों की सहभागिता के साथ अधिगम को प्रभावी बना सके।

बालक को केंद्र बिन्दु मानकर सीखने की प्रक्रिया में बालक का भागीदारी सुनिश्चित कर उन्हें स्वयं करके देखने अपनी गलतियों को स्वयं ठीक करने के लिए समुचित अवसर उपलब्धा करवाने एवं उनमें समझ विकसित करने के लिए कार्य किया जाए।

निःशुल्क एवं अनिवार्य बाल शिक्षा अधिकार अधिनियम–2009 के प्रावधानानुसार सतत् एंव व्यापक मूल्यांकन के अनुसार विषयवस्तु निर्मित की गई है। अतः बालकों को स्तरानुसार समूह में बाँटकर समूह शिक्षण पर बल देकर बालकों में दक्षताएँ विकसित की जाए।

पाठ्यपुस्तक में अवधारणाओं का विस्तारपूर्वक वर्णन किया गया है तथा अधिक संख्या में चित्रों के माध्यम से समझाया गया है। उदाहरण और अभ्यास सम्मिलित किए गए हैं, ताकि विद्यार्थियों में अवधारणाओं को अपने स्तर पर समझ कर प्रश्नों को बेहतर ढ़ंग से हल करने की दक्षता में वृद्धि हो सके तथा समस्याओं को हल करने में उनकी भागीदारी बढ़ सके।

बालकों में गणितीय सोच विकसित करने, गणितीय तथ्यों की पुनः खोज करने, आरेखण एवं मापन के लिए उपयुक्त दक्षता के विकास हेतु अनेक गतिविधियाँ दी गई हैं जिन्हें '**करो और सीखो**' का नाम दिया गया है। बालकों को यह गतिविधियाँ इसी भावना जिम्मेदारी, सहिष्णुता एंव सहयोग के अनुरुप करवाया जाना अपेक्षित है।

पाठ्यपुस्तक में राष्ट्रीय सरोकार यथा पर्यावरण संरक्षण, सड़क सुरक्षा, जेण्डर संवेदनशीलता, बेटी बचाओ बेटी पढ़ाओ, सामाजिक अवरोधों की समाप्ति की आवश्यकता एवं जागरूकता आदि का ध्यान में रखा गया है। अध्यापकों को इन तथ्यों के प्रति सचेत रहना चाहिए। उन्हें विद्यार्थियों के मस्तिष्क में उक्त प्रमुख संदेशों को गणितीय समस्याओं की शब्दावली के माध्यम से पहुँचाने चाहिए। बालकों को इन राष्ट्रीय सरोकारों के साथ जोड़ने एवं इनके प्रति उनमें समझ बनाने का प्रयास किया जाना अपेक्षित है।

अध्यापक अपनी सुविधानुसार कक्षा के बालकों को छोटे – छोटे समूह एवं उपसमूह बनाकर उन्हें गतिविधि करने का मौका दें ताकि स्व–अध्ययन कि प्रवृत्ति को बढ़ाकर एक सहयोगी के रूप में अपनी जिम्मेदारी तय कर सके। पाठ्यपुस्तक में विद्यार्थियों के अवबोधन एवं परिपक्वता के स्तर के अनुरूप शब्दावली एवं पारिभाषिक शब्दों का प्रयोग किया गया है। प्रत्येक अध्याय के अंत में महत्त्वपूर्ण संकल्पनाओं एवं परिणामों को "**हमने सीखा**" के रूप में स्थान दिया गया है।

भारतीय गणितज्ञों का जीवन परिचय एवं उनका गणित में योगदान का भी उल्लेख किया गया है ताकि बालक भारत की समृद्ध परम्पराओं और भारतीयों द्वारा गणित में किये गए योगदान के प्रति अपनी समझ बना सकें।

पाठ्यपुस्तक एवं पाठ्यक्रम को तैयार करने में बालक को केंद्र में मानकर शिक्षक पर सर्वाधिक विश्वास इस भावना के साथ किया गया है कि शिक्षक इन संप्रयत्नों की पूर्ति हेतु पूर्ण निष्ठा लगन एवं ईमानदारी के साथ बालक के साथ कार्य करेगा। लेखक समूह शिक्षक पर भरोसा कर यह पाठ्यपुस्तक राज्य के शिक्षकों एवं बालकों को समर्पित करता है।

भारत में गणित की समृद्ध परम्परा रही है। आदिकाल से ही भारतीय मनीषियों एवं गणितज्ञों ने इस क्षेत्र में श्रेष्ठ कार्य किया है। पुरातन ज्ञान का उपयोग आधुनिक गणित में किया जा सके एवं प्राचीन उपलब्धियों का तारतम्य आधुनिक गणित को उन्नत बनाने के लिए किया जा सके, इसी उद्देश्य से पाठ्यपुस्तक में भारतीय अंक प्रणाली (देवनागरी) एवं वैदिक गणित का समावेश किया गया है। वैदिक गणित के द्वारा गणनाओं को सरल करने का प्रयास किया गया है।

अनुक्रमणिका

अध्याय 1

परिमेय संख्याएँ

1.1 पिछली कक्षा में हमने परिमेय संख्याओं की आवश्यकता को अनुभूत करते हुए परिमेय संख्या को $\frac{p}{q}$ के रूप में परिभाषित किया था जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$। हमने परिमेय संख्याओं का संख्या रेखा पर निरूपण, इनकी समतुल्यता, इनके सरलतम (मानक) रूप, उनकी आपस में तुलना और दो परिमेय संख्याओं के बीच की परिमेय संख्या ज्ञात करना आदि का विस्तार से अध्ययन एवं अभ्यास किया है। इस इकाई में पिछली कक्षा के काम को आगे बढ़ाते हुए परिमेय संख्याओं में संक्रियाएँ, गुणात्मक प्रतिलोम, इन संख्याओं के गुणधर्म और माध्य विधि से दो परिमेय संख्याओं के बीच परिमेय संख्याएँ ज्ञात करने का अध्ययन एवं अभ्यास करेंगे।

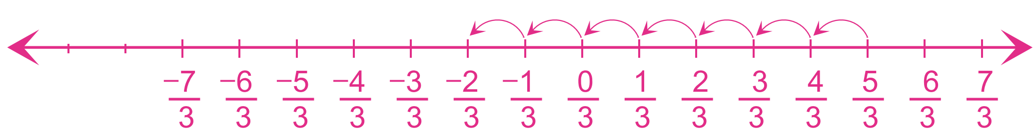
1.2 परिमेय संख्याओं पर संक्रियाएँ

हम जानते हैं कि पूर्णांक तथा भिन्नों को किस प्रकार जोड़ा, घटाया, गुणा और भाग किया जाता है। आइए इन आधारभूत संक्रियाओं का परिमेय संख्याओं पर अध्ययन करते हैं।

1.2.1 योग

विमला ने समान हर वाली दो परिमेय संख्याओं $\frac{5}{3}$ और $-\frac{7}{3}$ को संख्या रेखा पर इस प्रकार जोड़ा –

$$\frac{5}{3} + \left(-\frac{7}{3}\right)$$



संख्या रेखा पर दो क्रमागत बिंदुओं के बीच की दूरी $\frac{1}{3}$ है ।

अतः $\frac{5}{3}$ में $-\frac{7}{3}$ जोड़ने का मतलब है कि $\frac{5}{3}$ के $\left(\frac{7}{3}\text{ का ऋणात्मक चिह्न होने से}\right)$ सात कदम बाईं ओर चलें। हम कहाँ पहुँचते हैं?

हम $\frac{-2}{3}$ पर पहुँचते हैं।

अतः $$\frac{5}{3} + \left(-\frac{7}{3}\right) = \frac{-2}{3}$$

इसको सीधे इस प्रकार भी किया जा सकता है–

$$\frac{5}{3} + \left(-\frac{7}{3}\right)$$

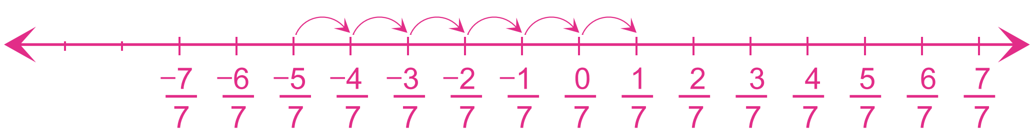
$$= \frac{5+(-7)}{3}$$

$$= \frac{5-7}{3}$$

$$= \frac{-2}{3}$$

दामोदर ने भी दो परिमेय संख्याओं $\frac{-5}{7}$ और $\frac{6}{7}$ को जोड़कर देखा –

$$\frac{-5}{7} + \frac{6}{7}$$



संख्या रेखा पर दो क्रमागत बिन्दुओं के बीच की दूरी $\frac{1}{7}$ है।

अतः $\frac{-5}{7}$ में $\frac{6}{7}$ जोड़ने का मतलब है कि $\frac{-5}{7}$ के दाईं ओर $\left(\frac{6}{7}\right.$ का धनात्मक चिह्न होने से$\left.\right)$ छः कदम चलें। हम $\frac{1}{7}$ पर पहुँचते हैं। अतः $\frac{-5}{7} + \frac{6}{7} = \frac{1}{7}$

इसे ऐसे भी हल किया जा सकता है $\frac{-5}{7} + \frac{6}{7}$

$$= \frac{-5+6}{7}$$

$$= \frac{1}{7}$$

करो और सीखो

- मान ज्ञात कीजिए–

  (i) $\frac{-11}{7} + \frac{4}{7}$ (ii) $\frac{3}{5} + \left(\frac{-2}{5}\right)$ (iii) $\frac{-3}{4} + \left(-\frac{5}{4}\right)$

आइए ऐसे कुछ और उदाहरण देखते हैं

$$\frac{4}{3}+\frac{1}{3} = \frac{4+1}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{-7}{5}+\frac{9}{5} = \frac{-7+9}{5} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{4}{7}+\left(\frac{-9}{7}\right) = \frac{4-9}{7} = \frac{-5}{7}$$

$$\frac{-1}{4}+\left(\frac{-2}{4}\right) = \frac{-1-2}{4} = \frac{-3}{4}$$

इस प्रकार हम देखते हैं कि समान हर वाली परिमेय संख्याओं को जोड़ते समय हर को वही रखते हुए अंशों को जोड़ देते हैं।

विमला ने दामोदर से पूछा कि हम अलग-अलग हर वाली दो परिमेय संख्याओं को किस प्रकार जोड़ेंगे ?

दामोदर–तुम्हें याद है, हमने अलग-अलग हर वाली दो भिन्नों को जोड़ा था।

1. भिन्नों की तरह, हम पहले इन हरों का लघुत्तम समापवर्त्य (ल.स.) ज्ञात करते हैं।
2. इसके बाद ऐसी समतुल्य परिमेय संख्याएँ ज्ञात करते हैं जिनका हर यह ल.स. हो।
3. फिर दोनों परिमेय संख्याओं को (जिनका हर समान है) जोड़ते हैं।

उदाहरण 1 परिमेय संख्या $\frac{-4}{3}$ और $\frac{2}{5}$ को जोड़िए।

हल

$$\frac{-4}{3}+\frac{2}{5}$$

3 और 5 का ल.स. 15 है।

$$-\frac{4}{3} = -\frac{4\times 5}{3\times 5} = -\frac{20}{15}$$

और $$\frac{2}{5} = \frac{2\times 3}{5\times 3} = \frac{6}{15}$$

$$\frac{-4}{3}+\frac{2}{5} = -\frac{20}{15}+\frac{6}{15}$$

$$= \frac{-20+6}{15} = \frac{-14}{15}$$

करो और सीखो

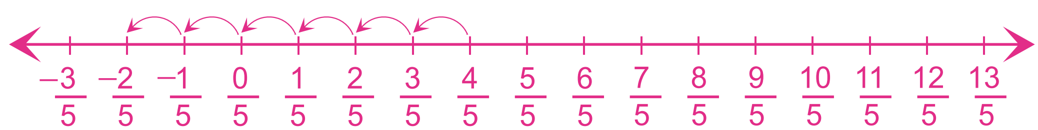
- मान ज्ञात कीजिए–

(i) $\frac{2}{5}+\frac{1}{6}$ (ii) $\frac{3}{8}+\left(\frac{-5}{2}\right)$ (iii) $\frac{-7}{20}+\frac{7}{3}$ (iv) $-\frac{5}{7}+\left(\frac{-2}{4}\right)$

1.2.2 घटाना (व्यवकलन)

मनीष ने समान हर वाली दो परिमेय संख्याओं $\frac{4}{5}$ और $\frac{6}{5}$ को संख्या रेखा पर इस प्रकार

घटाया– $\frac{4}{5}-\frac{6}{5}$



संख्या रेखा पर दो क्रमागत बिन्दुओं के बीच की दूरी $\frac{1}{5}$ है।

अतः $\frac{4}{5}$ में से $\frac{6}{5}$ घटाने का मतलब हैं कि $\frac{4}{5}$ के बाईं ओर छः कदम चलें। हम कहाँ पहुँचते हैं ?

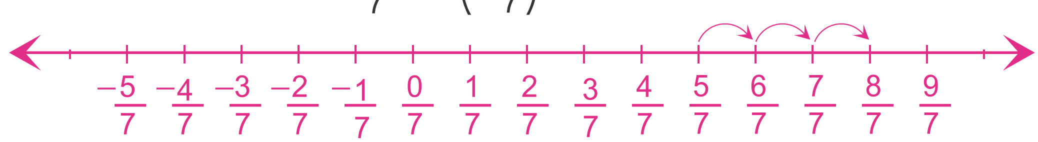
हम $-\frac{2}{5}$ पर पहुँचते हैं।

अतः $\frac{4}{5}-\frac{6}{5} = -\frac{2}{5}$

इसे ऐसे भी कर सकते हैं– $\frac{4}{5}-\frac{6}{5} = \frac{4-6}{5} = -\frac{2}{5}$

प्रणिति ने भी दो परिमेय संख्याओं $\frac{5}{7}$ और $\left(-\frac{3}{7}\right)$ को घटाकर देखा –

$$\frac{5}{7}-\left(-\frac{3}{7}\right)$$



संख्या रेखा पर दो क्रमागत बिन्दुओं के बीच की दूरी $\frac{1}{7}$ है। अतः $\frac{5}{7}$ में से $\left(-\frac{3}{7}\right)$ घटाने का मतलब है कि $\frac{5}{7}$ के दाईं ओर $\left(-\frac{3}{7}\right.$ को घटाने से$\left.\right)$ तीन कदम चलें।

हम $\frac{8}{7}$ पर पहुँचते हैं।

$$\text{अतः } \frac{5}{7} - \left(\frac{-3}{7}\right) = \frac{8}{7}$$

इसे ऐसे भी किया जा सकता है–

$$\frac{5}{7} - \left(\frac{-3}{7}\right) = \frac{5-(-3)}{7}$$

$$= \frac{5+3}{7}$$

$$= \frac{8}{7}$$

इस अभ्यास से हम कह सकते हैं कि समान हर वाली दो परिमेय संख्याओं को घटाते समय हर को वहीं रखते हुए अंशों को घटा देते हैं।

इस प्रकार $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2-1}{3} = \frac{1}{3}$

एक और तरीका –

उदाहरण 2 परिमेय संख्या $\frac{5}{8}$ में से $\frac{-7}{8}$ को घटाइए।

हल $\frac{5}{8} - \left(\frac{-7}{8}\right) = \frac{5}{8} + \left(\frac{7}{8}\right)$

$$= \frac{5}{8} + \frac{7}{8}$$

$$= \frac{5+7}{8}$$

$$= \frac{12}{8}$$

$$= \frac{3}{2}$$

करो और सीखो

- मान ज्ञात कीजिए–

(i) $\frac{10}{7} - \frac{4}{7}$ (ii) $\frac{-4}{5} - \left(\frac{-2}{5}\right)$ (iii) $\frac{7}{9} - \left(\frac{-4}{9}\right)$

मनीष ने प्रणिति से प्रश्न किया कि यदि दोनों परिमेय संख्याओं का हर अलग–अलग हो तो उन्हें कैसे घटाएँगे ?

प्रणिति – ठीक उसी प्रकार जैसे हमने जोड़ में किया था लेकिन अंतिम चरण में जोड़ के स्थान पर घटाव करते हैं।

उदाहरण 3 परिमेय संख्या $-\frac{5}{4}$ में से $-\frac{3}{8}$ को घटाइए।

हल

$$-\frac{5}{4}-\left(\frac{-3}{8}\right)$$

4 और 8 का ल.स. 8 है।

$$-\frac{5}{4}=-\frac{5\times 2}{4\times 2}=-\frac{10}{8}$$

$$-\frac{5}{4}-\left(\frac{-3}{8}\right)=-\frac{10}{8}-\left(\frac{-3}{8}\right)$$

$$=\frac{-10-(-3)}{8}$$

$$=\frac{-10+3}{8}$$

$$=-\frac{7}{8}$$

करो और सीखो

- मान ज्ञात कीजिए–

  (i) $\frac{4}{3}-\frac{3}{8}$ (ii) $\left(\frac{-3}{7}\right)-\frac{2}{14}$ (iii) $\frac{5}{9}-\left(\frac{-2}{11}\right)$ (iv) $\left(\frac{-2}{9}\right)-\frac{7}{6}$

1.2.3 गुणन

हमने भिन्न संख्याओं का गुणनफल सीखा है।

आइए, परिमेय संख्या के गुणनफल $\left(2\times-\frac{5}{7}\right)$ पर विचार करते हैं।

तरीका – 1 (बार–बार जोड़ना)

$2\times\left(-\frac{5}{7}\right)$ का मतलब है दो बार $-\frac{5}{7}$ को जोड़ना

अर्थात् $\left(-\frac{5}{7}\right)+\left(-\frac{5}{7}\right)=\frac{-5}{7}-\frac{5}{7}$

$$=\frac{-5-5}{7}$$

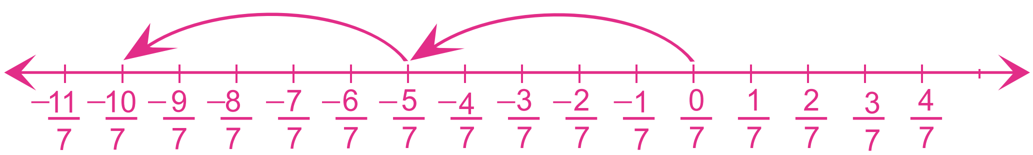
$$=\frac{-10}{7}$$

तरीका – 2 (संख्या रेखा द्वारा)

संख्या रेखा पर दो क्रमागत बिंदुओं के बीच की दूरी $\frac{1}{7}$ है।

शून्य के बाईं ओर चलकर ($\frac{5}{7}$ ऋणात्मक संख्या है)

$\frac{5}{7}$ लम्बी दूरी की दो कूद (क्योंकि $-\frac{5}{7}$ दो बार है) करते हैं। हम कहाँ पहुँचते हैं ?



हम $-\frac{10}{7}$ पर पहुँचते हैं।

अर्थात् $2 \times \left(-\frac{5}{7}\right) = -\frac{10}{7}$

तरीका – 3 (गुणन क्रिया द्वारा)

$$2 \times \left(-\frac{5}{7}\right) = \frac{2}{1} \times \left(-\frac{5}{7}\right)$$
$$= \frac{2 \times (-5)}{1 \times 7}$$
$$= -\frac{10}{7}$$

करो और सीखो

- मान ज्ञात कीजिए–

(i) $4 \times \left(-\frac{1}{3}\right)$ (ii) $\left(-\frac{3}{5}\right) \times 7$ (iii) $\left(-\frac{4}{5}\right) \times (-3)$

(iv) $\left(-\frac{3}{7}\right) \times \frac{2}{5}$ (v) $\frac{2}{3} - \left(\frac{-1}{4}\right)$ (vi) $\left(\frac{-3}{2}\right) \times \left(\frac{-9}{7}\right)$

जरा, सोचिए ! आपने इनका गुणनफल ज्ञात करने के लिए क्या प्रक्रिया अपनाई ?
दो परिमेय संख्याओं का गुणनफल करते समय उनके अंशों का गुणनफल कर अंश में एवं उनके हरों का गुणनफल कर हर में लिखते हैं।

1.2.4 भाग

हम भिन्नों के व्युत्क्रम के बारे में जानते हैं।

$\frac{3}{7}$ का व्युत्क्रम $\frac{7}{3}$ है।

यह अवधारणा परिमेय संख्याओं के व्युत्क्रम के लिए भी लागू है।
इस प्रकार $-\frac{3}{4}$ का व्युत्क्रम $\frac{4}{-3}$ अथवा $\frac{-4}{3}$ होगा तथा $-\frac{7}{9}$ का व्युत्क्रम $-\frac{9}{7}$ होगा।
हम जानते हैं कि 10 x 5 = 50
इसे भाग के रूप में दो तरीके से लिख सकते हैं–

$50 \div 10 = 5$	$50 \div 5 = 10$
$\frac{50}{10} = 5$	$\frac{50}{5} = 10$
$50 \times \frac{1}{10} = 5$	$50 \times \frac{1}{5} = 10$

इसे समझने पर निष्कर्ष निकलता है कि भाज्य में भाजक से भाग करते हैं तो भागफल प्राप्त होता है तथा भाज्य में भाजक के व्युत्क्रम से गुणा करते हैं तो भी भागफल के बराबर ही संख्या प्राप्त होती है। इससे स्पष्ट होता है कि भाग की क्रिया को गुणा के रूप में बदला जा सकता है।

उदाहरण 4 $\frac{-21}{8} \div \frac{8}{3}$ को हल कीजिए।

हल

$$\frac{-21}{8} \div \frac{8}{3} = \frac{-21}{8} \times \frac{3}{8}$$
$$= \frac{-21 \times 3}{8 \times 8}$$
$$= \frac{-63}{64}$$

उपर्युक्त उदाहरण से यह प्रदर्शित होता है कि एक परिमेय संख्या को किसी अन्य परिमेय संख्या से भाग देने के लिए, हम उस परिमेय संख्या को अन्य परिमेय संख्या के व्युत्क्रम से गुणा कर देते हैं।

करो और सीखो

- हल कीजिए–

  (i) $-\frac{7}{2} \div 4$ (ii) $\frac{-12}{7} \div \frac{3}{4}$ (iii) $\frac{5}{9} \div \left(\frac{-4}{5}\right)$

परिमेय संख्या में उसी परिमेय का भाग

$$\frac{3}{7} \div \frac{3}{7} = \frac{3}{7} \times \left(\frac{3}{7} \text{ का व्युत्क्रम}\right) = \frac{3}{7} \times \frac{7}{3} = 1$$

$$\frac{-4}{5} \div \left(\frac{-4}{5}\right) = \frac{-4}{5} \times \left(\frac{-4}{5} \text{ का व्युत्क्रम}\right) = \frac{-4}{5} \times \left(\frac{-5}{4}\right) = 1$$

आप भी कुछ ऐसे ही उदाहरण देखिए।
उपर्युक्त विवेचन से स्पष्ट है कि किसी परिमेय संख्या में उसी परिमेय संख्या से भाग करते हैं तो

भागफल सदैव 1 प्राप्त होता है। दूसरे शब्दों में, किसी परिमेय संख्या का उसके व्युत्क्रम से गुणनफल सदैव 1 होता है।

करो और सीखो

- हल कीजिए–

(i) $\frac{5}{7} \div \frac{5}{7}$ (ii) $\frac{-9}{4} \div \frac{-9}{4}$ (iii) $\frac{-7}{11} \div \frac{-7}{11}$

1.3 परिमेय संख्याओं के गुणधर्म

1.3.1 संवृत गुणधर्म

(i) योग

आइए, दो परिमेय संख्याओं के योग पर विचार करते हैं –

$\frac{3}{4} + \frac{5}{3} = \frac{9}{12} + \frac{20}{12} = \frac{9+20}{12} = \frac{29}{12}$ एक परिमेय संख्या है।

$\frac{2}{7} + \left(\frac{-6}{11}\right) = \frac{22}{77} + \left(\frac{-42}{77}\right) = \frac{22-42}{77} = \frac{-20}{77}$ एक परिमेय संख्या है।

$\frac{5}{11} + \frac{6}{11} = \frac{5+6}{11} = \frac{11}{11} = 1$ एक परिमेय संख्या है।

ऐसी ही कुछ और संख्याओं के साथ जाँच कीजिए।

हम देखते हैं कि दो परिमेय संख्याओं का योग पुनः परिमेय संख्या है अतः **परिमेय संख्याएँ योग के अंतर्गत संवृत हैं** अर्थात् किन्हीं दो परिमेय संख्याओं x तथा y के लिए $(x + y)$ भी एक परिमेय संख्या है।

(ii) व्यवकलन

आइए, दो परिमेय संख्याओं के व्यवकलन पर विचार करते हैं –

$\frac{5}{7} - \frac{3}{8} = \frac{40}{56} - \frac{21}{56} = \frac{40-21}{56} = \frac{19}{56}$ एक परिमेय संख्या है।

$\frac{7}{8} - \frac{8}{9} = \frac{63}{72} - \frac{64}{72} = \frac{63-64}{72} = \frac{-1}{72}$ एक परिमेय संख्या है।

$\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1-1}{4} = \frac{0}{4} = 0$ एक परिमेय संख्या है।

ऐसी ही कुछ और संख्याओं के साथ जाँच कीजिए।

हम पाते हैं कि किन्हीं दो परिमेय संख्याओं के लिए उनका अंतर भी परिमेय संख्या है अतः **परिमेय संख्याएँ व्यवकलन के अंतर्गत संवृत हैं** अर्थात् किन्हीं दो परिमेय संख्याओं x तथा y के लिए $(x - y)$ भी एक परिमेय संख्या है।

(iii) गुणन

आइए, अब दो परिमेय संख्याओं के गुणनफल का अध्ययन करते हैं –

$$\frac{-4}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{(-4)\times 3}{5 \times 7} = \frac{-12}{35}$$ एक परिमेय संख्या है।

$$\frac{2}{3} \times \left(\frac{-4}{9}\right) = \frac{2 \times (-4)}{3 \times 9} = \frac{-8}{27}$$ एक परिमेय संख्या है।

$$\left(\frac{-2}{7}\right) \times \left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{(-2)\times(-1)}{7 \times 3} = \frac{2}{21}$$ एक परिमेय संख्या है।

ऐसी ही कुछ और संख्याओं के साथ जाँच कीजिए।

सभी उदाहरणों में हम देखते हैं कि दो परिमेय संख्याओं का गुणनफल एक परिमेय संख्या है। अतः **परिमेय संख्याएँ गुणन के अंतर्गत संवृत हैं** अर्थात् किन्हीं दो परिमेय संख्याओं x तथा y के लिए $(x \times y)$ भी एक परिमेय संख्या है।

(iv) भाग

आइए, अब दो परिमेय संख्याओं के भाग का अध्ययन करते हैं।

$$\frac{2}{3} \div \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{2 \times 4}{3 \times 3} = \frac{8}{9}$$ एक परिमेय संख्या है।

$$\frac{-7}{2} \div \frac{3}{5} = \frac{-7}{2} \times \frac{5}{3} = \frac{-7 \times 5}{2 \times 3} = \frac{-35}{6}$$ एक परिमेय संख्या है।

$$0 \div \frac{1}{2} = 0 \times \frac{2}{1} = 0$$ एक परिमेय संख्या है।

$$5 \div 0 = 5 \times \frac{1}{0} = \frac{5}{0}$$ एक परिमेय संख्या नहीं है। (अपरिभाषित)

अतः हम कह सकते हैं कि दो परिमेय संख्याओं का भाग सदैव एक परिमेय संख्या ही हो ऐसा आवश्यक नहीं है। अतः **परिमेय संख्याएँ भाग के अंतर्गत संवृत नहीं है।**

करो और सीखो

सारणी में खाली स्थानों को भरिए –

संख्याएँ	संक्रिया के अंतर्गत संवृत हैं			
	योग	व्यवकलन	गुणन	भाग
प्राकृत संख्या	हाँ	----	----	----
पूर्ण संख्या	----	----	----	नहीं
पूर्णांक	----	हाँ	----	----
परिमेय संख्या	----	----	हाँ	----

1.3.2 क्रम विनिमेय गुणधर्म

(i) योग

दो परिमेय संख्याओं $\frac{3}{7}$, $\frac{-1}{4}$ को जोड़ कर देखिए।

$$\frac{3}{7} + \left(\frac{-1}{4}\right) = \frac{12}{28} + \left(\frac{-7}{28}\right) = \frac{12-7}{28} = \frac{5}{28}$$

और $$\left(\frac{-1}{4}\right) + \frac{3}{7} = \left(\frac{-7}{28}\right) + \frac{12}{28} = \frac{-7+12}{28} = \frac{5}{28}$$

अतः $$\frac{3}{7} + \left(\frac{-1}{4}\right) = \left(\frac{-1}{4}\right) + \frac{3}{7}$$

इसी प्रकार $$\frac{-4}{5} + \left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{-12}{15} + \left(\frac{-10}{15}\right) = \frac{-12-10}{15} = \frac{-22}{15}$$

$$\frac{-2}{3} + \left(\frac{-4}{5}\right) = \frac{-10}{15} + \left(\frac{-12}{15}\right) = \frac{-10-12}{15} = \frac{-22}{15}$$

अतः $$\frac{-2}{3} + \left(\frac{-4}{5}\right) = \frac{-4}{5} + \left(\frac{-2}{3}\right)$$

आप ऐसी ही कुछ ओर परिमेय संख्याएँ लेकर योग के लिए क्रम विनिमेय गुणधर्म की जाँच कीजिए।

हम पाते हैं कि दो परिमेय संख्याओं को किसी भी क्रम में जोड़ने पर परिणाम समान प्राप्त होता है। अतः हम कह सकते हैं कि **परिमेय संख्याओं के लिए योग क्रम विनिमेय है**, अर्थात् किन्हीं परिमेय संख्याओं a और b के लिए

$$\boxed{a + b = b + a}$$

(ii) व्यवकलन

दो परिमेय संख्याओं $\frac{2}{5}$ और $\frac{4}{7}$ को घटा कर देखिए।

$$\frac{2}{5} - \frac{4}{7} = \frac{14}{35} - \frac{20}{35} = \frac{14-20}{35} = \frac{-6}{35}$$

$$\frac{4}{7} - \frac{2}{5} = \frac{20}{35} - \frac{14}{35} = \frac{20-14}{35} = \frac{6}{35}$$

अतः $$\frac{2}{5} - \frac{4}{7} \neq \frac{4}{7} - \frac{2}{5}$$

इस प्रकार हम कह सकते हैं कि **परिमेय संख्याओं के लिए व्यवकलन क्रम विनिमेय नहीं है,** अर्थात परिमेय संख्याओं a और b के लिए

$$\boxed{a - b \neq b - a}$$

(iii) गुणन

दो परिमेय संख्याओं $\frac{-4}{5}$ और $\frac{3}{7}$ का गुणन कर देखिए –

$$\left(\frac{-4}{5}\right) \times \frac{3}{7} = \frac{(-4) \times 3}{5 \times 7} = \frac{-12}{35}$$

$$\frac{3}{7} \times \left(\frac{-4}{5}\right) = \frac{3 \times (-4)}{7 \times 5} = \frac{-12}{35}$$

अतः $$\left(\frac{-4}{5}\right) \times \frac{3}{7} = \frac{3}{7} \times \left(\frac{-4}{5}\right)$$

आप ऐसी ही कुछ और परिमेय संख्याएँ लेकर गुणन के लिए क्रम विनिमेय गुणधर्म की जाँच कीजिए। हम कह सकते हैं कि **परिमेय संख्याओं के लिए गुणन क्रम विनिमेय है** अर्थात् किन्हीं परिमेय संख्याओं a और b के लिए –

$$\boxed{a \times b = b \times a}$$

(iv) भाग

दो परिमेय संख्याओं $\frac{7}{3}$ और $\frac{14}{5}$ का भाग करके देखिए –

$$\frac{7}{3} \div \frac{14}{5} = \frac{7}{3} \times \frac{5}{14} = \frac{35}{42}$$

और

$$\frac{14}{5} \div \frac{7}{3} = \frac{14}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{42}{35}$$

अतः $$\frac{7}{3} \div \frac{14}{5} \neq \frac{14}{5} \div \frac{7}{3}$$

इस प्रकार हम कह सकते हैं कि **परिमेय संख्याओं के लिए भाग क्रम विनिमेय नहीं हैं।** अर्थात् किन्हीं परिमेय संख्याओं a और b के लिए –

$$\boxed{a \div b \neq b \div a}$$

करो और सीखो

सारणी में खाली स्थानों को भरिए –

संख्याएँ	क्रम विनिमेयता			
	योग	व्यवकलन	गुणा	भाग
प्राकृत संख्या	हाँ	नहीं	हाँ	नहीं
पूर्ण संख्या	–––––	–––––	–––––	–––––
पूर्णांक	–––––	–––––	–––––	–––––
परिमेय संख्या	–––––	–––––	–––––	–––––

1.3.3 साहचर्य (सहचारिता) गुणधर्म

(i) योग

तीन परिमेय संख्याएँ $\frac{-5}{4}$, $\frac{3}{8}$ और $\frac{-7}{6}$ लेकर जाँच कीजिए।

$$\frac{-5}{4}+\left(\frac{3}{8}+\frac{-7}{6}\right) \qquad\qquad \left(\frac{-5}{4}+\frac{3}{8}\right)+\frac{-7}{6}$$

$$=\frac{-5}{4}+\left(\frac{9-28}{24}\right) \qquad\qquad =\left(\frac{-10+3}{8}\right)+\frac{-7}{6}$$

$$=\frac{-5}{4}+\left(\frac{-19}{24}\right) \qquad\qquad =\left(\frac{-7}{8}\right)+\left(\frac{-7}{6}\right)$$

$$=\frac{-5}{4}-\frac{19}{24} \qquad\qquad =\frac{-21+(-28)}{24}$$

$$=\frac{-30-19}{24} \qquad\qquad =\frac{-21-28}{24}$$

$$=\frac{-49}{24} \qquad\qquad =\frac{-49}{24}$$

अतः $\frac{-5}{4}+\left(\frac{3}{8}+\frac{-7}{6}\right)=\left(\frac{-5}{4}+\frac{3}{8}\right)+\frac{-7}{6}$

करो और सीखो

क्या दोनों ओर के योग समान हैं ?

(i) $\frac{-3}{5}+\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{7}\right)=\left(\frac{-3}{5}+\frac{2}{3}\right)+\frac{4}{7}$

(ii) $\frac{1}{2}+\left(\frac{-3}{4}+\frac{-5}{8}\right)=\left(\frac{1}{2}+\frac{-3}{4}\right)+\frac{-5}{8}$

ऐसे ही उदाहरण लेकर आप भी जाँच कीजिए कि क्या योगफल समान प्राप्त होता है ?

हम पाते हैं कि **परिमेय संख्याओं के लिए योग साहचर्य है।** अर्थात् किन्हीं तीन परिमेय संख्याओं a , b और c के लिए

$$\boxed{a+(b+c)=(a+b)+c}$$

(ii) व्यवकलन

तीन परिमेय संख्याएँ $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ और $\frac{-5}{4}$ लेकर जाँच कीजिए।

$$\frac{1}{2} - \left[\frac{3}{4} - \left(\frac{-5}{4}\right)\right] \quad \Bigg| \quad \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right) - \left(\frac{-5}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \left(\frac{3+5}{4}\right) \quad \Bigg| \quad = \left(\frac{2-3}{4}\right) - \left(\frac{-5}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{8}{4} \quad \Bigg| \quad = \frac{-1}{4} - \left(\frac{-5}{4}\right)$$

$$= \frac{2-8}{4} \quad \Bigg| \quad = \frac{-1}{4} + \frac{5}{4}$$

$$= \frac{-6}{4} \quad \Bigg| \quad = \frac{4}{4}$$

$$= \frac{-3}{2} \quad \Bigg| \quad = 1$$

अतः
$$\frac{1}{2} - \left[\left(\frac{3}{4} - \frac{-5}{4}\right)\right] \neq \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right) - \left(\frac{-5}{4}\right)$$

हम पाते हैं कि **परिमेय संख्याओं के लिए व्यवकलन साहचर्य नहीं है** अर्थात् किन्हीं तीन परिमेय संख्याओं a , b और c के लिए

$$\boxed{a-(b-c) \neq (a-b)-c}$$

(iii) गुणन

तीन परिमेय संख्याएँ $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{7}$ और $\frac{-5}{7}$ लेकर जाँच कीजिए –

$$\frac{2}{3} \times \left[\frac{4}{7} \times \left(\frac{-5}{7}\right)\right] \quad \Bigg| \quad \left(\frac{2}{3} \times \frac{4}{7}\right) \times \left(\frac{-5}{7}\right)$$

$$= \frac{2}{3} \times \left[\frac{4 \times (-5)}{7 \times 7}\right] \quad \Bigg| \quad = \left(\frac{2 \times 4}{3 \times 7}\right) \times \left(\frac{-5}{7}\right)$$

$$= \frac{2}{3} \times \left(\frac{-20}{49}\right) \quad \Bigg| \quad = \frac{8}{21} \times \left(\frac{-5}{7}\right)$$

$$= \frac{2 \times (-20)}{3 \times 49} \quad \Bigg| \quad = \frac{8 \times (-5)}{21 \times 7}$$

$$= \frac{2 \times -20}{3 \times 49} \quad \Bigg| \quad = \frac{8 \times -5}{21 \times 7}$$

$$= \frac{-40}{147} \quad \Bigg| \quad = \frac{-40}{147}$$

अतः
$$\frac{2}{3} \times \left(\frac{4}{7} \times \frac{-5}{7}\right) = \left(\frac{2}{3} \times \frac{4}{7}\right) \times \left(\frac{-5}{7}\right)$$

कुछ और परिमेय संख्याएँ लेकर स्वयं जाँच कीजिए।

हम पाते हैं कि परिमेय संख्याओं के लिए गुणन साहचर्य है अर्थात् किन्हीं तीन परिमेय संख्याओं a , b और c के लिए

$$\boxed{a \times (b \times c) = (a \times b) \times c}$$

करो और सीखो

सत्यापित कीजिए–

(i) $\frac{-4}{3} \times \left[\left(\frac{-2}{5}\right) \times \frac{1}{7}\right] = \left[\frac{-4}{3} \times \left(\frac{-2}{5}\right)\right] \times \frac{1}{7}$

(ii) $\frac{-3}{5} \times \left[\frac{4}{11} \times \left(\frac{-3}{22}\right)\right] = \left[\left(\frac{-3}{5}\right) \times \frac{4}{11}\right] \times \frac{-3}{22}$

(iv) भाग

कोई तीन परिमेय संख्याएँ $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ और $\frac{-2}{7}$ लेकर जाँच कीजिए।

$$\frac{2}{3} \div \left[\frac{3}{4} \div \left(\frac{-2}{7}\right)\right]$$
$$= \frac{2}{3} \div \left[\frac{3}{4} \times \left(-\frac{7}{2}\right)\right]$$
$$= \frac{2}{3} \div \left[\frac{3 \times (-7)}{4 \times 2}\right]$$
$$= \frac{2}{3} \div \left(\frac{-21}{8}\right)$$
$$= \frac{2}{3} \times \frac{8}{-21}$$
$$= \frac{-16}{63}$$

$$\left(\frac{2}{3} \div \frac{3}{4}\right) \div \left(\frac{-2}{7}\right)$$
$$= \left(\frac{2}{3} \times \frac{4}{3}\right) \div \left(\frac{-2}{7}\right)$$
$$= \left(\frac{2 \times 4}{3 \times 3}\right) \div \left(\frac{-2}{7}\right)$$
$$= \frac{8}{9} \div \left(\frac{-2}{7}\right)$$
$$= \frac{8}{9} \times \left(\frac{7}{-2}\right)$$
$$= \frac{-56}{18}$$

अब $$\frac{2}{3} \div \left[\frac{3}{4} \div \left(\frac{-2}{7}\right)\right] \neq \left[\left(\frac{2}{3} \div \frac{3}{4}\right)\right] \div \left(\frac{-2}{7}\right)$$

हम पाते हैं कि **परिमेय संख्याओं के लिए भाग साहचर्य नहीं है** अर्थात किन्हीं तीन परिमेय संख्याओं a , b और c के लिए

$$\boxed{a \div (b \div c) \neq (a \div b) \div c}$$

करो और सीखो

सारणी में खाली स्थानों को भरिए –

संख्याएँ	साहचर्य			
	योग	व्यवकलन	गुणा	भाग
प्राकृत संख्या	हाँ	–––––	–––––	–––––
पूर्ण संख्या	–––––	–––––	–––––	नहीं
पूर्णांक	–––––	–––––	हाँ	–––––
परिमेय संख्या	–––––	–––––	–––––	–––––

1.3.4 शून्य की परिमेय संख्याओं के साथ संक्रियाएँ

क्या आप कोई ऐसी संख्या बता सकते हैं, जिसे किसी संख्या में जोड़ने पर वही संख्या प्राप्त हो जाए? जब 0 (शून्य) किसी भी परिमेय संख्या में जोड़ा जाता है तो वही परिमेय संख्या प्राप्त होती है।

$$5 + 0 = 0 + 5 = 5$$
$$(-3) + 0 = 0 + (-3) = -3$$
$$\left(\frac{-5}{7}\right) + 0 = 0 + \left(\frac{-5}{7}\right) = \frac{-5}{7}$$

इस कारण 0 (शून्य) को योज्य तत्समक कहते हैं अर्थात किसी परिमेय संख्या a के लिए

$$\boxed{a + 0 = 0 + a = a}$$

सोचिए क्या प्राकृत संख्याओं में योज्य तत्समक है ?

करो और सीखो

रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए –

(i) $3 + \square = 3$ (ii) $\square + 0 = -7$ (iii) $\frac{-4}{9} + \square = \frac{-4}{9}$

(iv) $\square + \frac{9}{13} = \frac{9}{13}$ (v) $\frac{-5}{11} + 0 = \square$

1.3.5 गुणात्मक तत्समक

रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए –

$8 \times \square = 8$ और $\square \times 8 = 8$

$(-5) \times \square = -5$ और $\square \times (-5) = -5$

$\left(\frac{2}{3}\right) \times \square = \frac{2}{3}$ और $\square \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

$\left(\frac{-4}{7}\right) \times \square = \frac{-4}{7}$ और $\square \times \left(\frac{-4}{7}\right) = \frac{-4}{7}$

इस अभ्यास से हम कह सकते हैं कि –

किसी भी परिमेय संख्या को 1 से गुणा करते हैं तो गुणनफल वही परिमेय संख्या प्राप्त होती है। अर्थात 1 (एक) परिमेय संख्या के लिए गुणात्मक तत्समक है। किसी परिमेय संख्या a के लिए

$$\boxed{a \times 1 = 1 \times a = a}$$

सोचिए, पूर्णांक और पूर्ण संख्याओं के लिए गुणात्मक तत्समक क्या है ?

1.3.6 योज्य प्रतिलोम

रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–

$2 + \square = 0$	और	$\square + 2 = 0$
$-3 + \square = 0$	और	$\square + (-3) = 0$
$\frac{3}{4} + \square = 0$	और	$\square + \frac{3}{4} = 0$
$-\frac{5}{7} + \square = 0$	और	$\square + \left(\frac{-5}{7}\right) = 0$

इस अभ्यास से हम कह सकते हैं कि –

जब दो संख्याओं का योग शून्य (योज्य तत्समक) हो तो वे दोनों संख्याएँ एक दूसरे की योज्य प्रतिलोम होती हैं। जैसे 1 का योज्य प्रतिलोम –1 तथा –1 का योज्य प्रतिलोम 1 है।

इस प्रकार हम कह सकते हैं कि $\frac{a}{b}$ का योज्य प्रतिलोम $\frac{-a}{b}$ तथा $\frac{-a}{b}$ का योज्य प्रतिलोम $\frac{a}{b}$ है।

करो और सीखो

1. निम्न परिमेय संख्याओं के योज्य प्रतिलोम लिखिए।

(i) 4 (ii) $\frac{-1}{3}$ (iii) $\frac{7}{2}$ (iv) $\frac{-3}{5}$ (v) $\frac{9}{2}$

1.3.7 गुणात्मक प्रतिलोम

रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–

$5 \times \square = 1$	और	$\square \times 5 = 1$
$-7 \times \square = 1$	और	$\square \times (-7) = 1$
$\frac{2}{3} \times \square = 1$	और	$\square \times \frac{2}{3} = 1$
$-\frac{2}{3} \times \square = 1$	और	$\square \times \left(\frac{-2}{3}\right) = 1$

इस अभ्यास से हम कह सकते हैं कि –

जब दो संख्याओं का गुणनफल 1 (गुणात्मक तत्समक) हो तो वे दोनों संख्याएँ एक दूसरे की गुणात्मक प्रतिलोम होती है। जैसे $\frac{3}{4}$ का गुणात्मक प्रतिलोम $\frac{4}{3}$ तथा $\frac{4}{3}$ का गुणात्मक प्रतिलोम $\frac{3}{4}$ है।

किसी परिमेय संख्या $\frac{a}{b}$ के लिए यदि $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1 = \frac{b}{a} \times \frac{a}{b}$ होता है तो हम कह सकते हैं कि $\frac{a}{b}$ का गुणात्मक प्रतिलोम $\frac{b}{a}$ तथा $\frac{b}{a}$ का गुणात्मक प्रतिलोम $\frac{a}{b}$ है।

क्या आप बता सकते हैं कि शून्य का गुणात्मक प्रतिलोम क्या है ?

करो और सीखो

1. परिमेय संख्याओं $3, \frac{1}{5}, \frac{-3}{7}, \frac{2}{3}, \frac{-5}{6}$ के गुणात्मक प्रतिलोम लिखिए ।

1.3.8 परिमेय संख्याओं के लिए गुणन की योग पर वितरकता

निम्नलिखित पर विचार कीजिए –

$$\begin{aligned} &\frac{5}{4}\times\left[\left(\frac{-2}{8}\right)+\left(\frac{-3}{5}\right)\right] \\ &= \frac{5}{4}\times\left(\frac{-10-24}{40}\right) \\ &= \frac{5}{4}\times\left(\frac{-34}{40}\right) \\ &= \frac{-170}{160} \\ &= \frac{-17}{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{5}{4}\times\left[\left(\frac{-2}{8}\right)+\left(\frac{-3}{5}\right)\right] \\ &= \frac{5}{4}\times\left(\frac{-2}{8}\right)+\frac{5}{4}\times\left(\frac{-3}{5}\right) \\ &= \frac{-10}{32}+\left(\frac{-15}{20}\right) \\ &= \frac{-50-120}{160} \\ &= \frac{-170}{160} \\ &= \frac{-17}{16} \end{aligned}$$

अतः $\quad \frac{5}{4}\times\left[\left(\frac{-2}{8}\right)+\left(\frac{-3}{5}\right)\right] = \frac{5}{4}\times\left(\frac{-2}{8}\right)+\frac{5}{4}\times\left(\frac{-3}{5}\right)$

क्या $\quad \frac{2}{5}\times\left[\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{-3}{4}\right)\right] = \frac{2}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\times\left(\frac{-3}{4}\right)$ है ?

यह गुण योग पर गुणा का वितरण (गुणन की योग पर वितरकता) कहलाता है।
क्या परिमेय संख्याओं के लिए व्यवकलन पर गुणन की वितरकता सत्य है ?
सभी परिमेय संख्याओं a , b और c के लिए

$$a\times(b+c) = a\times b + a\times c$$
$$a\times(b-c) = a\times b - a\times c$$

करो और सीखो

वितरण नियम (वितरकता) का उपयोग कर निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए।

(i) $\frac{5}{8} \times \left(\frac{-3}{7}\right) + \frac{5}{8} \times \left(\frac{-7}{6}\right)$ (ii) $\frac{2}{5} \times \left(\frac{-1}{9}\right) + \frac{2}{5} \times \left(\frac{-3}{7}\right)$

(iii) $\left(\frac{-4}{5}\right) \times \frac{2}{9} + \left(\frac{-4}{5}\right) \times \frac{7}{11}$ (iv) $\frac{3}{5} \times \left(\frac{-1}{3}\right) + \frac{3}{5} \times \frac{3}{5}$

1.3.9 दो परिमेय संख्याओं के बीच की परिमेय संख्या ज्ञात करना (औसत द्वारा)

हमने पिछली कक्षा में दो परिमेय संख्याओं के बीच की परिमेय संख्या ज्ञात की थी। हम माध्य के बारे में भी पढ़ चुके हैं। आइए अब हम औसत (माध्य) द्वारा दो परिमेय संख्याओं के बीच की परिमेय संख्या ज्ञात करने का अभ्यास करते हैं–

हम जानते हैं कि

5 और 1 के बीच की प्राकृत संख्याएँ 4, 3, 2 है।

क्या कोई प्राकृत संख्या 2 और 3 के बीच है ?

–3 और 3 के बीच के पूर्णांक –2, –1, 0, 1, 2 है।

क्या दो क्रमिक पूर्णांकों के बीच कोई पूर्णांक है ?

दो क्रमिक पूर्णांकों के बीच कोई भी पूर्णांक नहीं होता है। किंतु दो क्रमिक पूर्णांकों के बीच हम परिमेय संख्या ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण 5 2 और 3 के मध्य परिमेय संख्या ज्ञात कीजिए।

हल $\frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$

अतः $2 < \frac{5}{2} < 3$

उदाहरण 6 $\frac{3}{5}$ और $\frac{7}{2}$ के मध्य परिमेय संख्या बताइए।

हल
$$\frac{\frac{3}{5}+\frac{7}{2}}{2}$$
$$= \frac{\frac{6+35}{10}}{2}$$
$$= \frac{\frac{41}{10}}{2}$$
$$= \frac{41}{20}$$

दोनों उदाहरणों से स्पष्ट है कि दो परिमेय संख्याओं a और b के मध्य की परिमेय संख्या ज्ञात करने के लिए दोनों संख्याओं को जोड़ कर 2 का भाग लगाते हैं।

$$\text{मध्य संख्या} = \frac{a+b}{2}$$

उदाहरण 7 3 व 4 के मध्य तीन परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल 3 व 4 के मध्य की परिमेय संख्या $= \frac{3+4}{2}$

$= \frac{7}{2}$

इस प्रकार $3 < \frac{7}{2} < 4$

3 व $\frac{7}{2}$ के मध्य की परिमेय संख्या $= \dfrac{3+\frac{7}{2}}{2} = \dfrac{\frac{6+7}{2}}{2} = \dfrac{\frac{13}{2}}{2} = \frac{13}{4}$

इसलिए $3 < \frac{13}{4} < \frac{7}{2} < 4$

$\frac{7}{2}$ व 4 के मध्य की परिमेय संख्या $= \dfrac{\frac{7}{2}+4}{2} = \dfrac{\frac{7+8}{2}}{2} = \dfrac{\frac{15}{2}}{2} = \frac{15}{4}$

इसलिए $3 < \frac{13}{4} < \frac{7}{2} < \frac{15}{4} < 4$

अतः 3 व 4 के मध्य की तीन परिमेय संख्याएँ $\frac{13}{4}, \frac{7}{2}$ व $\frac{15}{4}$ हैं।

इसी प्रकार दो संख्याओं के बीच हम कितनी भी (अनंत) परिमेय संख्याएँ प्राप्त कर सकते हैं।

करो और सीखो

1. -1 और 2 के मध्य की परिमेय संख्या लिखिए।
2. $\frac{2}{3}$ और $\frac{3}{4}$ के मध्य की परिमेय संख्या लिखिए।
3. 2 और 3 के मध्य की तीन परिमेय संख्याएँ लिखिए।

प्रश्नावली 1

1. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए।
(किन्हीं दो को संख्या रेखा पर भी हल कीजिए)

(i) $\frac{5}{2}+\left(\frac{-3}{4}\right)$ (ii) $\frac{-2}{3}+\left(\frac{-4}{5}\right)+\frac{5}{6}$ (iii) $0+\frac{-2}{3}$

(iv) $-2\frac{1}{3}+4\frac{3}{5}$ (v) $\frac{-6}{5}+\left(\frac{-13}{7}\right)$ (vi) $\frac{-8}{19}+\frac{(-4)}{57}$

2. मान ज्ञात कीजिए। (किन्हीं दो को संख्या रेखा पर हल कीजिए)

(i) $\frac{2}{3}+\frac{5}{4}$ (ii) $-2\frac{1}{9}+7$ (iii) $\frac{-7}{16}+\frac{(-3)}{48}$

(iv) $\frac{-7}{63}+\left(\frac{-5}{21}\right)$ (v) $\frac{-2}{13}+\frac{(-1)}{7}$ (vi) $4\frac{3}{5}-\left(-2\frac{1}{3}\right)$

3. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

(i) $\frac{13}{15}\times 5$ (ii) $\frac{4}{-5}\times\frac{-5}{4}$ (iii) $\frac{-2}{5}\times\left(\frac{-3}{7}\right)$

(iv) $\frac{15}{18}\times\frac{5}{6}\times\frac{21}{5}$ (v) $\frac{9}{4}\times\left(\frac{-7}{5}\right)\times\left(\frac{-6}{21}\right)$ (vi) $2\frac{1}{9}\times\left(-3\frac{1}{2}\right)$

4. मान ज्ञात कीजिए।

(i) $(-6)\div\frac{3}{5}$ (ii) $\frac{-27}{5}\div\left(\frac{-54}{10}\right)$ (iii) $\frac{21}{36}\div\left(\frac{-7}{18}\right)$

(iv) $\frac{-7}{12}\div\left(\frac{-3}{13}\right)$ (v) $-2\frac{1}{9}\div 6\frac{1}{9}$ (vi) $\frac{2}{15}\div\left(\frac{-8}{45}\right)$

5. मान ज्ञात कीजिए।

(i) $\frac{3}{5}+\frac{7}{10}+\left(\frac{-8}{12}\right)+\frac{4}{3}$ (ii) $2\frac{1}{2}+\left(-3\frac{1}{2}\right)+\left(-2\frac{1}{3}\right)+\left(2\frac{1}{9}\right)$

(iii) $\left(\frac{-7}{5}\right)\times\frac{2}{3}\times\frac{15}{16}\times\left(\frac{-8}{9}\right)$ (iv) $\frac{1}{2}\div\left[\left(\frac{-1}{3}\right)\div\frac{2}{7}\right]$

6. उचित गुणधर्मों के उपयोग से निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए।

(i) $\frac{3}{5}\times\left(\frac{-3}{7}\right)-\frac{2}{7}\times\frac{3}{2}+\frac{3}{15}\times\frac{5}{9}$ (ii) $\frac{5}{2}-\frac{3}{5}\times\frac{7}{2}+\frac{3}{5}\times\left(\frac{-2}{3}\right)$

7. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं का योज्य प्रतिलोम लिखिए।

(i) $\frac{7}{19}$ (ii) $\frac{-9}{5}$ (iii) $\frac{-3}{-7}$

(iv) $\frac{5}{-9}$ (v) $\frac{-13}{-17}$ (vi) $\frac{21}{-31}$

8. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं के गुणात्मक प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

(i) -17 (ii) $\frac{-11}{17}$ (iii) $-1\times\frac{-3}{5}$ (iv) $\frac{13}{-19}$

9. परिमेय संख्या $\frac{5}{7}$ को $\frac{-7}{15}$ के व्युत्क्रम से गुणा कीजिए।

10. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

(i) दो परिमेय संख्याओं का गुणनफल सदैव -------------- होता है। (परिमेय/पूर्णांक)
(ii) किसी ऋणात्मक परिमेय संख्या का योज्य प्रतिलोम ----- होता है। (ऋणात्मक/धनात्मक)
(iii) शून्य का व्युत्क्रम ---------------- होता है। (शून्य/अनिर्धारित)
(iv) परिमेय संख्याओं का योज्य तत्समक -------------------- होता है। (शून्य/एक)
(v) परिमेय संख्याओं के लिए गुणात्मक तत्समक ------------------- है। (शून्य/एक)
(vi) परिमेय संख्या का गुणात्मक प्रतिलोम उसका ------------- होता है। (व्युत्क्रम/वही)
(vii) ऋणात्मक परिमेय संख्याएँ संख्या रेखा पर सदैव शून्य के ---------------- ओर होती है। (दाईं/बाईं)
(viii) धनात्मक परिमेय संख्याएँ संख्या रेखा पर सदैव शून्य के ------------------- ओर होती है। (दाईं/बाईं)
(ix) किसी परिमेय संख्या में उसके योज्य प्रतिलोम को जोड़ने पर परिणाम ---------- प्राप्त होता है। (शून्य/वही संख्या)
(x) किसी परिमेय संख्या में उसी परिमेय संख्या से भाग देने पर भागफल सदैव -------- प्राप्त होता है। (शून्य/एक)

11. माध्य विधि से–

(i) -3 और 0 के बीच कोई पाँच परिमेय संख्याएँ लिखिए।

(ii) 0 से बड़ी और $\frac{5}{6}$ से छोटी कोई चार परिमेय संख्याएँ लिखिए।

(iii) $\frac{-3}{4}$ और $\frac{5}{6}$ के बीच की कोई तीन परिमेय संख्याएँ बताइए।

हमने सीखा

1. समान हर वाली परिमेय संख्याओं को जोड़ने या घटाने के लिए हर को वही रखते हुए अंशों को जोड़ या घटा सकते हैं।
2. अलग–अलग हर वाली परिमेय संख्याओं को जोड़ने या घटाने के लिए हरों का लघुत्तम समापवर्त्य (ल.स.) लेना होता है।
3. परिमेय संख्याओं का गुणा करने के लिए अंश का गुणा अंश के साथ तथा हर का गुणा हर के साथ करते हैं।
4. किसी परिमेय संख्या को किसी अन्य परिमेय संख्या से भाग देने के लिए उस परिमेय संख्या को अन्य परिमेय संख्या के व्युत्क्रम से गुणा करते हैं।
5. किसी परिमेय संख्या का उसके व्युत्क्रम से गुणनफल सदैव 1 होता है।
6. परिमेय संख्याएँ योग, व्यवकलन और गुणन की संक्रियाओं के अन्तर्गत संवृत है।
7. परिमेय संख्याओं के लिए योग और गुणन की संक्रियाएँ क्रमविनिमेय तथा साहचर्य है।
8. परिमेय संख्याओं के लिए 0 (शून्य) योज्य तत्समक तथा 1 (एक) गुणात्मक तत्समक है।
9. परिमेय संख्या $\frac{a}{b}$ का योज्य प्रतिलोम $-\frac{a}{b}$ है और विलोमतः भी सत्य है। इसी प्रकार परिमेय संख्या $\frac{a}{b}$ का गुणात्मक प्रतिलोम $\frac{b}{a}$ है और विलोमतः भी सत्य है।
10. वितरकता नियम –

    परिमेय संख्या a, b और c के लिए–

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$
$$a \times (b - c) = a \times b - a \times c$$

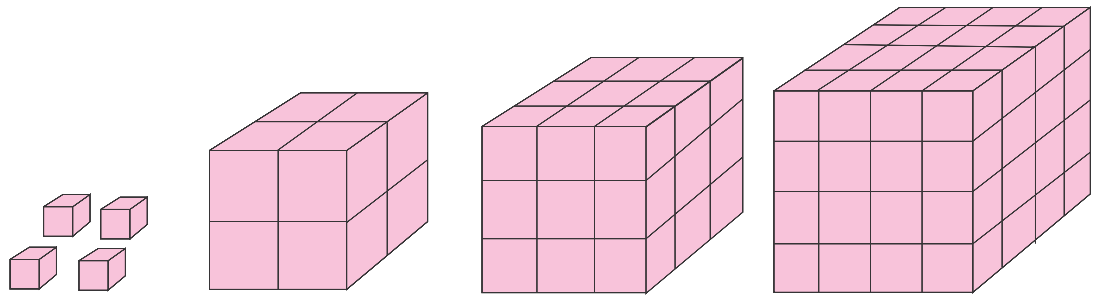
11. किन्हीं दो परिमेय संख्याओं के मध्य अपरिमित परिमेय संख्याएँ होती हैं। दो परिमेय संख्याओं के मध्य परिमेय संख्याएँ, माध्यविधि द्वारा ज्ञात की जाती है।

अध्याय 2

घन एवं घनमूल

2.1 घन एवं घनमूल

अपने गणित किट में से कुछ घन निकाल लीजिए इसे ध्यान से देखिए आप पाएँगें कि इसकी लम्बाई, चौडाई एवं ऊँचाई बराबर होती है। इन घनाकार ब्लॉक्स को आपस में जोड़कर/जमाकर बड़े घन भी बनाए जा सकते हैं। याद रहे कि उनकी लम्बाई, चौड़ाई व ऊँचाई भी समान रहे।



इकाई घन   दो इकाई के घन   तीन इकाई के घन   चार इकाई के घन

आकृति 2.1

क्र. स.	बडे घन की एक भुजा में इकाई घन की संख्या	बड़े घन को बनाने में लगे इकाई घनों की संख्या
1.	1	1
2.	2	8
3.	3	27
4.	4	---------------
5.	5	----------------

तालिका 2.1

संख्याएँ 1, 8, 27 .... पर विचार कीजिए, ये पूर्ण घन संख्याएँ या घन संख्याएँ कहलाती है। क्या आप बता सकते हैं इनको ये नाम क्यों दिए गए हैं ? इनमें से प्रत्येक संख्या तब प्राप्त होती है, जब उसको उसी से तीन बार गुणा किया जाता है। हम देखते हैं कि

$$1 = 1 \times 1 \times 1 = 1^3$$
$$8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$$
$$27 = 3 \times 3 \times 3 = 3^3$$

क्योंकि $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$ है, इसलिए 125 एक घन संख्या है। 9 एक घन संख्या नहीं है क्योंकि $9 \neq 3 \times 3 \times 3$ है और ऐसी कोई प्राकृत संख्या नहीं है जिसे स्वयं से तीन बार गुणा करने पर 9 प्राप्त हो। हम जानते हैं कि $2 \times 2 \times 2 = 8$ और $3 \times 3 \times 3 = 27$ है। इससे यह स्पष्ट होता है कि 9 एक पूर्ण घन संख्या नहीं है। नीचे 1 से 10 तक की संख्याओं के घन दिए गए हैं। **रिक्त स्थानों में आने वाली घन संख्याएँ भी ज्ञात कीजिए–**

संख्या	घन संख्याएँ
1	$1^3 = 1 \times 1 \times 1 = 1$
2	$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$
3	$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$
4	$4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$
5	$5^3 = 5 \times 5 \times 5 =$ -----
6	$6^3 = 6 \times 6 \times 6 =$ -----
7	$7^3 = 7 \times 7 \times 7 =$ -----
8	$8^3 = 8 \times 8 \times 8 =$ -----
9	$9^3 = 9 \times 9 \times 9 =$ -----
10	$10^3 = 10 \times 10 \times 10 =$ -----

तालिका 2.2

हम जानते हैं कि $2^2 = 4$ जहाँ $4 = 2 \times 2$ अथवा $4 = 2 + 2$ । इसी प्रकार $2^3 = 8$ जहाँ $8 = 2 \times 2 \times 2$ होता है। क्या यह $(2 + 2 + 2)$ के बराबर होता है ?

2.1.1 सम एवं विषम संख्याओं की घन संख्या

यहाँ हम देखते हैं कि 1 से 1000 के मध्य केवल 10 घन संख्याएँ हैं। तालिका 2.2 में सम संख्याओं के घनों को देखिए एवं विषम संख्याओं के घनों को देखिए आप यह पाएँगे कि सम सख्याओं का घन सदैव सम संख्या एवं विषम संख्याओं का घन सदैव विषम संख्या प्राप्त होती है।

2.1.2 घन संख्याओं के इकाई का अंक

ऊपर दी गई सारणी में संख्याओं के घनों में इकाई के अंको पर ध्यान दीजिए। किन किन संख्याओं के घन में इकाई का अंक 1 है, किन संख्याओं के घन के इकाई में वही अंक है जो मूल संख्या में हैं। आप पाएँगे कि जब किसी संख्या की इकाई में 0,1,4,5,6 है तो घन संख्या के इकाई में भी वही अंक आता है।

करो और सीखो

1. नीचे दी गई संख्याओं की घन संख्याओं के इकाई का अंक बताइए ।
   (i) 1331 (ii) 4444 (iii) 159 (iv) 1005

2. संख्या 46 का घन सम होगा या विषम ?

2.2 घन संख्याओं से जुड़े कुछ पैटर्न

2.2.1 क्रमागत विषम संख्याओं को जोड़ना

विषम संख्याओं के योग के निम्न प्रतिरूप देखिए।

$$1 = 1 = 1^3$$
$$3 + 5 = 8 = 2^3$$
$$7 + 9 + 11 = 27 = 3^3$$
$$13 + 15 + 17 + 19 = 64 = 4^3$$
$$21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 125 = 5^3$$

इस पैटर्न को देखते हुए बताएँ कि योग द्वारा 10^3 प्राप्त करने के लिए कितनी क्रमागत विषम संख्याओं की आवश्यकता होगी ?

करो और सीखो

• ऊपर दिए पैटर्न के अनुसार निम्न को विषम संख्याओं के योग के रूप में प्रदर्शित कीजिए।
(i) 7^3 (ii) 8^3

2.2.2 घन एवं उनके अभाज्य गुणनखण्ड

कुछ संख्याओं के अभाज्य गुणनखण्डों और उनके घनों के अभाज्य गुणनखण्डों पर विचार कीजिए।

संख्या	घन संख्या
4 = 2 x 2	4^3 = 64 = 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 = 2^3 x 2^3
6 = 2 x 3	6^3 = 216 = 2 x 2 x 2 x 3 x 3 x 3 = 2^3 x 3^3
10= 2 x 5	10^3 = 1000 = 2 x 2 x 2 x 5 x 5 x 5 = 2^3 x 5^3
12= 2 x 2 x 3	12^3 = 1728 =..................................

उक्त पैटर्न के आधार पर यह स्पष्ट है कि घन संख्याओं के अभाज्य गुणनखण्डों में प्रत्येक गुणनखण्ड तीन–तीन बार आता है अर्थात गुणनखण्डों के तीन–तीन के समूह बनाए जा सकते हैं।

उदाहरण 1 क्या 729 एक पूर्ण घन संख्या है ? विचार कीजिए।

हल 729 के अभाज्य गुणनखण्ड करने पर

3	729
3	243
3	81
3	27
3	9
3	3
	1

$$729 = \underbrace{3 \times 3 \times 3} \times \underbrace{3 \times 3 \times 3}$$

यहाँ आप देखते हैं कि अभाज्य गुणनखण्ड में तीन–तीन समान संख्याओं का समूह बनाया जा सकता है अतः 729 एक पूर्ण घन संख्या होगी।

उदाहरण 2 क्या 432 एक पूर्ण घन संख्या है ?

हल अभाज्य गुणनखण्ड करने पर

2	432
2	216
2	108
2	54
3	27
3	9
3	3
	1

$$432 = \underbrace{2 \times 2 \times 2} \times 2 \times \underbrace{3 \times 3 \times 3}$$

यहाँ तीन–तीन समान संख्याओं के समूह बनाने के पश्चात 2 शेष रह जाता है अतः यह एक पूर्ण घन संख्या नहीं है।

उदाहरण 3 क्या 5400 एक पूर्ण घन संख्या है यदि नहीं तो ऐसी सबसे छोटी प्राकृत संख्या बताइए जिसे 5400 से गुणा करने पर पूर्ण घन संख्या प्राप्त हो जाएगी।

हल 5400 का अभाज्य गुणनखण्ड करने पर

$$5400 = \underbrace{2 \times 2 \times 2} \times \underbrace{3 \times 3 \times 3} \times 5 \times 5$$

5400 के अभाज्य गुणनखण्ड में 2 तथा 3 के तीन–तीन के समूह हैं परन्तु 5 के तीन का समूह पूरा नहीं हो रहा है अतः 5400 एक पूर्ण घन संख्या नहीं है।

इसे पूर्ण घन बनाने के लिए 5 से गुणा करना होगा जिससे 5 के तीन–तीन का समूह पूर्ण हो जाएगा।

उदाहरण 4 क्या 1188 एक पूर्ण घन है ? यदि नहीं तो किस सबसे छोटी प्राकृत संख्या से 1188 को भाग दिया जाए कि भागफल एक पूर्ण घन संख्या प्राप्त हो जाए ?

हल $1188 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 11$

अभाज्य गुणनखण्ड 2 और 11 तीन–तीन के समूह में नहीं आ रहे हैं। अतः 1188 एक पूर्ण घन नहीं है। 1188 के उपर्युक्त गुणनखण्ड में अभाज्य गुणनखण्ड 2 केवल दो बार आ रहा है और अभाज्य गुणनखण्ड 11 एक बार अतः हम 1188 को $2 \times 2 \times 11 = 44$ से भाग दें तो भागफल के अभाज्य गुणनखण्ड में 2 और 11 नहीं आएँगे। अतः वह सबसे छोटी संख्या 44 होगी जिससे 1188 को भाग देने पर भागफल एक पूर्ण घन प्राप्त होगा।

$$\text{परिणामी पूर्ण घन} = 1188 \div 44 = 27 = 3^3$$

अर्थात् प्राप्त अभाज्य गुणनखण्ड में 3–3 के समूह वाले गुणनखण्डों के अलावा जो गुणनखण्ड बचते हैं, उनके गुणनफल का भाग लगाने से पूर्ण घन संख्या प्राप्त होती है।

करो और सीखो

- जाँच कीजिए कि निम्नलिखित में से कौन सी संख्याएँ पूर्ण घन है ?

(i) 2700	(ii) 16000	(iii) 64000	(iv) 900
(v) 125000	(vi) 36000	(viii) 21600	(viii)10000
(ix) 27000000	(x) 11000		

प्रश्नावली 2.1

1. निम्नलिखित में से कौनसी संख्याएँ पूर्ण घन नहीं है ?
   (i) 512 (ii) 243 (iii) 1000 (iv) 100 (v) 2700

2. वह सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे निम्नलिखित संख्याओं को गुणा करने पर पूर्ण घन प्राप्त हो जाए।
   (i) 108 (ii) 500 (iii) 5400 (iv) 10584

3. वह सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे निम्नालिखित संख्याओं को भाग देने पर एक पूर्ण घन प्राप्त होगा।
   (i) 24 (ii) 250 (iii) 192 (iv) 135

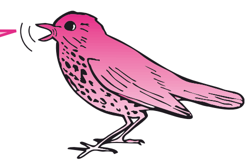
4. रेहान एक साबुन फेक्ट्री में काम करता है, वह घनाकार साबुन को जमाकर घन बनाकर खेल रहा है। बताइए यदि 216 साबुन जमाने हो तो बनने वाले घन की पहली पंक्ति में कितने साबुन होंगे ?

2.3 घनमूल

इस अध्याय के आरम्भ में हमने गणित किट के घनाकार ब्लॉक्स को जोड़कर बड़े घन बनाए थे।

पुनः इस क्रियाकलाप पर ध्यान दीजिए और बताइए कि 125 ब्लॉक्स से बने घन की एक भुजा में कितने ब्लॉक्स होंगें? भुजा की लम्बाई ज्ञात करने के लिए घन बनाकर देख सकते हैं परन्तु यही काम हम घनमूल ज्ञात करके भी कर सकते हैं ।

जिस प्रकार 'वर्गमूल' ज्ञात करना वर्ग करने की प्रक्रिया की विपरीत प्रक्रिया है इसी प्रकार घनमूल ज्ञात करना घन ज्ञात करने कि प्रक्रिया की विपरीत प्रक्रिया है।



हम जानते है कि $2^3 = 8$ इसलिए हम कहते हैं कि 8 का घनमूल 2 है इसे $\sqrt[3]{8} = 2$ से लिखा जाता है घनमूल का संकेत $\sqrt[3]{\ }$ से दिया जाता है।

निम्न सारणी को देखकर विचार करें।

संख्या का घन	घनमूल	संख्या का घन	घनमूल
$1^3 = 1$	$\sqrt[3]{1} = 1$	$6^3 = 216$	$\sqrt[3]{216} = 6$
$2^3 = 8$	$\sqrt[3]{8} = 2$	$7^3 = 343$	$\sqrt[3]{343} = 7$
$3^3 = 27$	$\sqrt[3]{27} = 3$	$8^3 = 512$	$\sqrt[3]{512} = 8$
$4^3 = 64$	$\sqrt[3]{64} = 4$	$9^3 = 729$	$\sqrt[3]{729} = 9$
$5^3 = 125$	$\sqrt[3]{125} = 5$	$10^3 = 1000$	$\sqrt[3]{1000} = 10$

तालिका 2.3

2.3.1 किसी संख्या का घनमूल अभाज्य गुणनखण्ड विधि द्वारा ज्ञात करना

संख्या 1728 का घनमूल अभाज्य गुणनखण्ड विधि द्वारा ज्ञात करना।

2	1728
2	864
2	432
2	216
2	108
2	54
3	27
3	9
3	3
	1

1728 के अभाज्य गुणनखण्ड निम्नानुसार प्राप्त होते हैं।

$$1728 = \underbrace{2 \times 2 \times 2} \times \underbrace{2 \times 2 \times 2} \times \underbrace{3 \times 3 \times 3}$$

अब इस गुणनखण्ड में समान अंकों के तीन तीन के समूह बनाकर देखें–

$$1728 = 2^3 \times 2^3 \times 3^3 = (2 \times 2 \times 3)^3$$

दोनों पक्षों का घनमूल करने पर

अतः $\sqrt[3]{1728} = 2 \times 2 \times 3 = 12$

उदाहरण 5 संख्या 17576 का घनमूल ज्ञात कीजिए।

हल 17576 के अभाज्य गुणनखण्ड

$17576 = 2 \times 2 \times 2 \times 13 \times 13 \times 13$

अतः $\sqrt[3]{17576} = 2 \times 13 = 26$

उदाहरण 6 अभाज्य गुणनखण्ड विधि द्वारा 9261 का घनमूल ज्ञात कीजिए।

हल 9261 के अभाज्य गुणनखण्ड $= \underbrace{3 \times 3 \times 3} \times \underbrace{7 \times 7 \times 7}$

अतः $\sqrt[3]{9261} = 3 \times 7 = 21$

2.3.2 किसी घन संख्या का घनमूल (अवलोकन विधि द्वारा)

यदि आपको यह ज्ञात है कि दी हुई संख्या एक घन संख्या है, तो उसका घनमूल ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित विधि का प्रयोग किया जा सकता है।

चरण 1 कोई घन संख्या मान लीजिए 175616 है तथा उसके सबसे दाईं ओर के अंक से प्रारम्भ करते हुए, तीन–तीन अंकों के समूह बनाइए।

175	616
दूसरा समूह	पहला समूह

हम किसी दी हुई घन संख्या का घनमूल एक चरणबद्ध प्रक्रिया द्वारा आकलित कर सकते है। यहाँ हमें तीन अंकों के दो समूह 616 और 175 प्राप्त हुए हैं।

चरण 2 प्रथम समूह 616 हमें घनमूल की इकाई का अंक देगा चुंकि 616 का अंतिम अंक 6 है, हम जानते हैं कि 6 किसी संख्या के इकाई के स्थान पर तभी आता है जब उसके घनमूल की इकाई का अंक 6 हो ($6^3 = 216$) ।

चरण 3 अब दूसरे समूह 175 पर विचार कीजिए।

संख्या 175, $5^3 = 125$ तथा $6^3 = 216$ के मध्य आता है

अर्थात् $5^3 < 175 < 6^3$

अतः दहाई का अंक होगा 5

इस प्रकार $\sqrt[3]{175616} = 56$

उदाहरण 7 संख्या 13824 का घनमूल आकलन द्वारा ज्ञात कीजिए।

हल दी गई संख्या 13824 है।

चरण 1 दाईं ओर से आरम्भ करते हुए तीन–तीन अंकों के समूह बनाइए।

$\underline{13}\ \underline{824}$

चरण 2 पहला समूह 824 है तथा इसका इकाई का अंक 4 है जो कि केवल 4 इकाई वाले अंक के घन से ही प्राप्त होगा ($4^3 = 64$)

अतः इकाई का अंक 4 होगा।

चरण 3 दूसरा समूह 13 प्राप्त हुआ ।

$2^3 < 13 < 3^3$

अतः दहाई का अंक 2 प्राप्त हुआ

अतः दी गई संख्या का घनमूल 24 होगा।

$\sqrt[3]{13824} = 24$

प्रश्नावली 2.2

1. निम्न कथनों में सही/गलत बताइए।
   (i) प्रत्येक सम संख्या का घन सम होता है।
   (ii) एक पूर्ण घन संख्या दो शून्यों (00) पर समाप्त नहीं होती है।
   (iii) ऐसा कोई पूर्ण घन नहीं है जो 8 पर समाप्त होता है।
   (iv) यदि किसी संख्या का वर्ग 5 पर समाप्त होता है तो उसका घन 25 पर समाप्त होता है।
   (v) एक अंक वाली संख्या का घन एक अंक का ही होता है।
   (vi) दो अंकों वाली संख्या का घन 4 से 6 अंकों का होता है।
2. आकलन विधि एवं अभाज्य गुणनखण्ड विधि द्वारा निम्नलिखित संख्याओं का घनमूल ज्ञात कीजिए तथा अपने उत्तर की जाँच कीजिए।

(i) 64	(ii) 343	(iii) 5832	(iv) 74088
(v) 3375	(vi) 10648	(vii) 46656	(viii) 91125

हमने सीखा

1. किसी संख्या की घन संख्या तब प्राप्त होती है, जब उस संख्या को उसी से तीन बार गुणा किया जाता है।
2. किसी संख्या की घात तीन उस संख्या के घन के बराबर होती है।
   जैसे–
   $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$
3. सम संख्याओं का घन सदैव सम संख्या तथा विषम संख्याओं का घन सदैव विषम संख्या होती है।
4. किसी संख्या के इकाई में 0, 1, 4, 5, 6 अंक होने पर उस संख्या के घन का इकाई अंक भी वही होता है।
5. अभाज्य गुणनखण्ड में प्रत्येक गुणनखण्ड तीन–तीन बार आता है, अर्थात् गुणनखण्डों के तीन–तीन के समूह बनाए जा सकते हैं।
6. घनमूल ज्ञात करना, घन ज्ञात करने की प्रक्रिया की प्रतिलोम संक्रिया है।
7. किसी घन संख्या का घनमूल अभाज्य गुणनखण्ड विधि द्वारा ज्ञात किया जा सकता है।
8. बड़ी घन संख्याओं का घनमूल इकाई की तरफ से तीन–तीन के समूह बनाकर, अनुमान द्वारा ज्ञात कर सकते हैं।

अध्याय 3

घात एवं घातांक

3.1 पिछली कक्षा में हमने संख्याओं के घातीय रूप के बारे मे पढ़ा है आइए इन संख्याओं पर पुनः विचार करें –

$10^3, 2^{10}, 5^5$

इनको प्रसारित रूप में किस प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है? आओ प्रयास करें।

$10^3 = 10 \times 10 \times 10$

$2^{10} = - - - - - - - -$

$5^5 = - - - - - - - -$

इसी के साथ हमने सीखा कि $10^2 \times 10^5 = 10^{2+5} = 10^7$

एवं $\frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2$

अर्थात् समान आधार की संख्याओं का गुणा करने पर घातांक जुड़ जाते हैं और भाग देने पर घातांक को घटाया जाता है।

$a^m \times a^n = a^{m+n}$ एवं $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ जब $m > n$

तथा $(a^m)^n = a^{mn}$

इस अध्याय में हम घातांक से सम्बन्धित अन्य समस्याओं का अध्ययन करेंगे।

3.2 घातांक (पूर्णांक), आधार (परिमेय संख्याएँ ≠ 0)

नीचे दी गई परिमेय संख्याओं के घातांकों पर विचार कीजिए।

1. $\left(\frac{5}{7}\right)^4 = \frac{5}{7} \times \frac{5}{7} \times \frac{5}{7} \times \frac{5}{7}$

$\frac{5 \times 5 \times 5 \times 5}{7 \times 7 \times 7 \times 7} = \frac{5^4}{7^4}$

2. $\left(\frac{-3}{11}\right)^5 = \left\{(-1) \times \left(\frac{3}{11}\right)\right\}^5 = (-1)^5 \times \left(\frac{3}{11}\right)^5$

$= (-1) \times \frac{3}{11} \times \frac{3}{11} \times \frac{3}{11} \times \frac{3}{11} \times \frac{3}{11}$ $[\because (-1)^5 = -1]$

$= -\frac{3^5}{11^5}$

3. $\left(\frac{-4}{3}\right)^6 = (-1)^6 \times \left(\frac{4}{3}\right)^6$

$= \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{3}$ $\quad [\because (-1)^6 = 1]$

$= \frac{4^6}{3^6}$

अतः यदि हमारे पास कोई परिमेय संख्या $\left(\frac{5}{4}\right)^m$ हो, तो

$$\left(\frac{5}{4}\right)^m = \frac{5}{4} \times \frac{5}{4} \times \frac{5}{4} \times \text{----------} \; (m \text{ बार})$$

$$= \frac{5 \times 5 \times 5 \times \text{----------} \; m \text{ बार}}{4 \times 4 \times 4 \times \text{----------} \; m \text{ बार}} = \frac{5^m}{4^m}$$

करो और सीखो

$\left(\frac{3}{2}\right)^3, \left(\frac{9}{4}\right)^5, \left(-\frac{4}{7}\right)^6, \left(-\frac{2}{5}\right)^3, \left(\frac{2}{3}\right)^p$ को विस्तारित कीजिए।

यदि कोई परिमेय संख्या $\left(\frac{p}{q}\right)$ (जहाँ $q \neq 0$) की घात m हो, तब

$$\left(\frac{p}{q}\right)^m = \frac{p}{q} \times \frac{p}{q} \times \frac{p}{q} \times \text{------} \; (m \text{ बार})$$

$$= \frac{p \times p \times p \times \text{------} \; (m \text{ बार})}{q \times q \times q \times \text{------} \; (m \text{ बार})} = \frac{p^m}{q^m}$$

अर्थात $\left(\frac{p}{q}\right)^m = \frac{p^m}{q^m}$ जहाँ p, q कोई पूर्णांक है एवं $q \neq 0$

अब यदि परिमेय संख्या का घात ऋणात्मक हो, तब स्थिति कैसी होगी ?
आओ निम्न उदाहरणों पर विचार करें–

(i) $\left(\frac{5}{4}\right)^{-2}$

$= \frac{5^{-2}}{4^{-2}}$

$= \frac{\frac{1}{5^2}}{\frac{1}{4^2}}$

$= \frac{4^2}{5^2}$

$= \left(\frac{4}{5}\right)^2$

(ii) $\left(\frac{3}{7}\right)^{-4}$

$= \frac{3^{-4}}{7^{-4}}$

$= \frac{\frac{1}{3^4}}{\frac{1}{7^4}}$

$= \frac{7^4}{3^4}$

$= \left(\frac{7}{3}\right)^4$

(iii) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-m}$

$= \frac{2^{-m}}{5^{-m}}$

$= \frac{\frac{1}{2^m}}{\frac{1}{5^m}}$

$= \frac{5^m}{2^m}$

$= \left(\frac{5}{2}\right)^m$

$\left[\because \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}\right.$ और $\left.a^{-m} = \frac{1}{a^m}\right]$

करो और सीखो

$\left(\frac{7}{5}\right)^{-5}, \left(\frac{14}{13}\right)^{-9}, \left(\frac{15}{6}\right)^{-4}, \left(\frac{113}{53}\right)^{-11}, \left(\frac{5}{7}\right)^{-7}$ को धनात्मक घातांकों के रूप मे प्रदर्शित कीजिए।

पुनः विचार कीजिए $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \frac{a^{-m}}{b^{-m}} = \frac{b^m}{a^m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$

इसी प्रकार स्पष्ट है कि –

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$$

यहाँ a, b कोई पूर्णांक है तथा

$$a \neq 0 \ , \ b \neq 0$$

निम्नलिखित क्रियाओं को देखते हैं–

$$5^4 \div 5^4 = 5^{4-4} = 5^0$$

परन्तु $5^4 \div 5^4 = \frac{5 \times 5 \times 5 \times 5}{5 \times 5 \times 5 \times 5} = 1$

अतः $5^0 = 1$

इस प्रकार किसी भी आधार पर घातांक 0 (शून्य) होने पर उसका मान 1 ही प्राप्त होता है।

जैसे (i) $(3)^4 \div (3)^4 = 3^{4-4} = 3^0 = 1$

(ii) $(-5)^6 \div (-5)^6 = (-5)^{6-6} = (-5)^0 = 1$

(iii) $\left(\frac{2}{5}\right)^3 \div \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \left(\frac{2}{5}\right)^{3-3} = \left(\frac{2}{5}\right)^0 = 1$

इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि किसी भी संख्या (0 के अतिरिक्त) पर यदि कोई घातांक (0 शून्य) हो तो उसका मान सदैव 1 होता है।

यदि a कोई परिमेय संख्या हो तो $a^0 = 1$, $(a \neq 0)$

करो और सीखो

निम्नलिखित को सरल कीजिए।

(i) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-3}$ (ii) $\left(\frac{3}{10}\right)^{-2}$ (iii) $\left(\frac{5}{12}\right)^{-3}$

(iv) $(3)^2 \div (3)^2$ (v) $(2)^5 \div (2)^5$

उदाहरण 1 $7^{8} \div 7^{8}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $7^{8-8} = 7^{0} = 1$

उदाहरण 2 $\left(\frac{4}{7}\right)^5 \div \left(\frac{4}{7}\right)^5$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $\left(\frac{4}{7}\right)^5 \div \left(\frac{4}{7}\right)^5$

$\left(\frac{4}{7}\right)^{5-5} = \left(\frac{4}{7}\right)^{0} = 1$

उदाहरण 3 $(2^3)^2$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $(2^3)^2$

$= 2^{3\times2}$

$= 2^6$

विशेष $(2^3)^2$	$(2)^{3^2}$
$= 2^3 \times 2^3 = 2^{3+3} = 2^6$	$= 2^{3 \times 3}$
$= 64$	$= 2^9 = 512$

उदाहरण 4 निम्न को सरल कीजिए।

1. $\left(\frac{5}{7}\right)^4 \times \left(\frac{7}{5}\right)^2$

2. $\left(-\frac{2}{9}\right)^{-4} \times \left(\frac{9}{2}\right)^2$

हल

$= \left(\frac{5}{7}\right)^4 \times \left(\frac{7}{5}\right)^2$

$= \left(\frac{5}{7}\right)^4 \times \left(\frac{5}{7}\right)^{-2}$

$= \left(\frac{5}{7}\right)^{4+(-2)}$

$= \left(\frac{5}{7}\right)^2$

$= \frac{5^2}{7^2}$

$= \frac{25}{49}$

हल

$= \left(-\frac{2}{9}\right)^{-4} \times \left(\frac{9}{2}\right)^2$

$= \left(-\frac{9}{2}\right)^4 \times \left(\frac{9}{2}\right)^2$

$= (-1)^4 \times \left(\frac{9}{2}\right)^4 \times \left(\frac{9}{2}\right)^2$

$= 1 \times \left(\frac{9}{2}\right)^{4+2}$

$= \left(\frac{9}{2}\right)^6$

$= \frac{531441}{64}$

प्रश्नावली 3.1

1. निम्न को सरल कीजिए।

(i) $\left(\frac{2}{7}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3$ (ii) $\left(\frac{4}{5}\right)^4 \times \left(\frac{5}{4}\right)^2$

(iii) $(-5)^3 \times \left(-\frac{1}{5}\right)^2$ (iv) $\left(\frac{3}{4}\right)^3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{-5}$

2. मान ज्ञात कीजिए।

(i) $(-5)^3$ (ii) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ (iii) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4$

3. अभाज्य गुणनखण्ड की सहायता से घातांक रूप में परिवर्तित कीजिए।

(i) $\frac{1}{64}$ (ii) $\frac{16}{125}$ (iii) $-\frac{8}{27}$

(iv) $-\frac{1}{8}$ (v) $-\frac{25}{49}$

4. मान ज्ञात कीजिए।

(i) $3^2 \times 3^3$ (ii) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3$ (iii) $\left(\frac{3}{2}\right)^2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^3$

(iv) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^4$ (v) $\left(-\frac{2}{5}\right)^2 \times \left(-\frac{2}{5}\right)^3$

5. घातांक के रूप में उत्तर दीजिए।

(i) $4^5 \div 4^2$ (ii) $(-5)^7 \div (-5)^4$

(iii) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 \div \left(\frac{2}{3}\right)^4$ (iv) $\left(-\frac{1}{5}\right)^{11} \div \left(-\frac{1}{5}\right)^6$

6. मान ज्ञात कीजिए।

(i) $(3^2)^3$ (ii) $(2^3)^2$ (iii) $(5^2)^2$

(iv) $(-2^4)^2$ (v) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^4$ (vi) $\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^3\right]^2$

7. मान ज्ञात कीजिए।

(i) 3^0 (ii) 7^{5-5} (iii) $(-2)^{3-3}$

(iv) $\left(\frac{2}{5}\right)^{2+3-5}$ (v) $2^0 \times 3^0$ (vi) $2^0 + 5^0$

(vii) $\left(\frac{7}{15}\right)^0 + \left(\frac{1}{7}\right)^{3-3}$

8. धनात्मक घातांक वाली संख्याओं में रूपांतरण कीजिए।

(i) 2^{-3} (ii) 3^{-5} (iii) a^{-4} (iv) $(-2)^{-5}$

(v) $(-x)^{-3}$ (vi) $\frac{1}{5^{-3}}$ (vii) $\frac{1}{y^{-3}}$ (viii) $\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}}$

9. निम्नलिखित को घातांक के रूप में लिखकर सरल कीजिए।

(i) $(2^2 \times 3^3)^2$ (ii) $\left(\frac{15}{16}\right)^3 \div \left(\frac{9}{8}\right)^2$ (iii) $\left(\frac{4}{9}\right)^2 \div \left(\frac{28}{27}\right)^3$

(iv) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2$ (v) $\left(\frac{5^2}{3^2}\right)^2$ (vi) $\left[\frac{2^2 \times 3^2}{2^3 \times 6^2}\right]^2$

10. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$ का मान ज्ञात कीजिए ?

3.3 एक और एक से अधिक संक्रियाओं वाले प्रश्न

उदाहरण 5 $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right\} \div \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$ को हल कीजिए।

हल $\left\{\left(\frac{3}{1}\right)^{2} - \left(\frac{2}{1}\right)^{3}\right\} \div \left(\frac{4}{1}\right)^{2}$

$= (3^2 - 2^3) \div 4^2$

$= (9 - 8) \div 16$

$= \frac{1}{16}$

उदाहरण 6 $(4^{-1} + 8^{-1}) \div \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$ को हल कीजिए।

हल $\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) \div \left(\frac{3}{2}\right)$

$= \left(\frac{2+1}{8}\right) \div \left(\frac{3}{2}\right)$

$= \frac{\cancel{3}^1}{\cancel{8}_4} \times \frac{\cancel{2}^1}{\cancel{3}_1} = \frac{1}{4}$

उदाहरण 7 यदि $(-2)^{x+1} \times (-2)^3 = (-2)^5$ हो तो x का मान ज्ञात कीजिए।

हल $(-2)^{x+1} \times (-2)^3 = (-2)^5$

या $(-2)^{x+1+3} = (-2)^5$

या $(-2)^{x+4} = (-2)^5$

चूँकि दोनों घातों के आधार समान हैं, अतः उनके घातांक समान होंगे

$x + 4 = 5$

या $x = 5 - 4 = 1$

उदाहरण 8 $\dfrac{3^{-5} \times 10^{-5} \times 125}{5^{-7} \times 6^{-5}}$ को हल कीजिए।

हल $\dfrac{3^{-5} \times (2 \times 5)^{-5} \times (5 \times 5 \times 5)}{5^{-7} \times (2 \times 3)^{-5}}$

$= \dfrac{3^{-5} \times 2^{-5} \times 5^{-5} \times 5^{3}}{5^{-7} \times 2^{-5} \times 3^{-5}}$

$= \dfrac{5^{-5} \times 5^{3}}{5^{-7}}$

$= \dfrac{5^{-5+3}}{5^{-7}} = \dfrac{5^{-2}}{5^{-7}} = 5^{-2+7}$

$= 5^5 = 3125$

उदाहरण 9 $\left(\dfrac{9}{8}\right)^{-3} \times \left(\dfrac{8}{9}\right)^{-2}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $\left(\dfrac{9}{8}\right)^{-3} \times \left(\dfrac{8}{9}\right)^{-2}$

$= \left(\dfrac{8}{9}\right)^{3} \times \left(\dfrac{9}{8}\right)^{2}$

$= \dfrac{8^3}{9^3} \times \dfrac{9^2}{8^2}$

$= \dfrac{8^3}{8^2} \times \dfrac{9^2}{9^3}$

$= \dfrac{8^{3-2}}{9^{3-2}} = \dfrac{8}{9}$

एक और तरीका

$\left(\dfrac{8}{9}\right)^{3} \times \left(\dfrac{8}{9}\right)^{-2}$

$(a^m \times a^n = a^{m+n})$

$= \left(\dfrac{8}{9}\right)^{3-2} = \left(\dfrac{8}{9}\right)^{1} = \dfrac{8}{9}$

प्रश्नावली 3.2

1. मान ज्ञात कीजिए।

(i) $(5^{-1} \times 2^{-1}) \div 6^{-1}$ (ii) $\left(\dfrac{5}{6}\right)^{6} \times \left(\dfrac{5}{6}\right)^{-4}$ (iii) $\left(\dfrac{5}{8}\right)^{-2} \times \left(\dfrac{8}{5}\right)^{-5}$ (iv) $\left(\dfrac{5}{9}\right)^{-2} \times \left(\dfrac{3}{5}\right)^{-3} \times \left(\dfrac{3}{5}\right)^{0}$

2. सरल कीजिए।

(i) $\dfrac{16^{-1} \times 5^3}{2^{-4}}$ (ii) $\dfrac{25 \times t^{-4}}{5^{-3} \times 5 \times t^{-8}}$, $(t \neq 0)$

(iii) $\dfrac{6^3 \times 7^4 \times 8^5}{4^3 \times 9^2 \times 16}$ (iv) $\dfrac{15^3 \times 18^2}{3^5 \times 5^4 \times 12^2}$ (v) $\left(\dfrac{6}{15}\right)^3 \div \left(\dfrac{25}{32}\right)^2 \times \left(\dfrac{45}{16}\right)^3$

3. x का मान ज्ञात कीजिए।

(i) $\left(\dfrac{4}{3}\right)^{-4} \times \left(\dfrac{4}{3}\right)^{-5} = \left(\dfrac{4}{3}\right)^{-3x}$ (ii) $7^x \div 7^{-3} = 7^5$ (iii) $(4)^{2x+1} \div 16 = 64$

4. मान ज्ञात कीजिए।

(i) $\dfrac{3125 \times 1296}{6561 \times 1875}$ (ii) $\dfrac{1536 \times 972}{486 \times 1152}$

$$\left[\text{Hint- } \dfrac{3125 \times 1296}{6561 \times 1875} = \dfrac{5^5 \times 2^4 \times 3^4}{3^8 \times 3 \times 5^4}\right]$$

3.4.1 वैज्ञानिक संकेतन

पिछली कक्षाओं में हमने पढ़ा कि बड़ी संख्याओं को इस प्रकार मानक रूप में लिखते हैं।

(i) 3,00,000 = 3 x 1,00,000 को 3×10^5 से

(ii) 15,00,00,000 = 15 x 1,00,00,000 को 1.5×10^8 से

(iii) 78,00,00,00,000 = 78 x 1,00,00,00,000 को 7.8×10^{10} से व्यक्त कर सकते हैं

इसी प्रकार

(iv) $0.1 = \dfrac{1}{10}$ को $\dfrac{1}{10^1} = 10^{-1}$ से

(v) $0.01 = \dfrac{1}{100}$ को $\dfrac{1}{10^2} = 10^{-2}$ से

(vi) $0.0001 = \dfrac{1}{10000}$ को $\dfrac{1}{10^4} = 10^{-4}$ से व्यक्त किया जा सकता है।

जिस प्रकार हमने पिछली कक्षा में बड़ी संख्याओं को सरलता से मानक रूप में लिखा, क्या उसी प्रकार छोटी संख्याओं को भी मानक रूप में लिखा जा सकता है ?

जैसे लाल रक्त कोशिकाओं का व्यास = 0.0000007 मीटर

कम्प्यूटर चिप के एक तार का व्यास = 0.0000003 मीटर

हमने उपर्युक्त उदाहरण में देखा हैं जैसे – $0.0001 = \dfrac{1}{10000} = \dfrac{1}{10^4} = 1 \times 10^{-4}$

इसी प्रकार $0.0000007 = \dfrac{7}{10000000} = \dfrac{7}{10^7} = 7 \times 10^{-7}$

$$0.0000003 = \dfrac{3}{10000000} = \dfrac{3}{10^7} = 3 \times 10^{-7}$$

अन्य उदाहरण $0.0000058 = \frac{58}{10000000} = \frac{58}{10^7} = \frac{5.8 \times 10}{10^7}$

$= 5.8 \times 10^1 \times 10^{-7} = 5.8 \times 10^{-6}$

इस प्रकार बहुत छोटी संख्याओं को आसानी से मानक रूप में व्यक्त कर सकते हैं।

उदाहरण 10 150000000 को मानक रूप में व्यक्त कीजिए।

हल $15 \times 10^7 = \frac{15}{10} \times 10^1 \times 10^7$

$= 1.5 \times 10^8$

> जिस प्रकार बड़ी संख्या में
> 1.50000000. दशमलव 8
> स्थान बाईं तरफ खिसक जाता है।
>
> उसी प्रकार छोटी संख्या में
> 0.0000005 दशमलव 7
> स्थान दाईं तरफ खिसक जाता है।

उदाहरण 11 जीवाणु की माप 0.0000005 मीटर को मानक रूप में व्यक्त कीजिए।

हल 0.0000005

$= \frac{5}{10000000} = \frac{5}{10^7}$

$= 5 \times 10^{-7}$

उदाहरण 12 निम्न संख्याओं को सामान्य रूप में व्यक्त कीजिए।

(i) 2.43×10^6 (ii) 9.3×10^{-5} (iii) 3×10^{-6}

हल (i) $2.43 \times 10^6 = 2.43 \times 10,00,000 = 2430000$

(ii) $9.3 \times 10^{-5} = \frac{9.3}{10^5} = \frac{9.3}{100000} = 0.000093$

(iii) $3 \times 10^{-6} = \frac{3}{10^6} = \frac{3}{1000000} = 0.000003$

करो और सीखो

1. निम्नलिखित संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त कीजिए।
   (i) 20700000 (ii) 0.000000154 (iii) 0.000095
   (iv) 28400000 (v) 0.00002459

2. निम्न संख्याओं को सामान्य रूप में व्यक्त कीजिए।
   (i) 1.5×10^5 (ii) 2.78×10^3 (iii) 3.9×10^{-5}

3.4.2 बहुत बड़ी संख्याओं और बहुत छोटी संख्याओं की तुलना

पृथ्वी का द्रव्यमान 5.97×10^{24} किलोग्राम और चंद्रमा का द्रव्यमान 7.35×10^{22} किलोग्राम है तो पृथ्वी का द्रव्यमान कितना किलोग्राम अधिक है ?

घटाने पर (5.97 x 10^{24} किग्रा) - (7.35 x 10^{22} किग्रा)

= (5.97 x 100 x 10^{22} किग्रा) - (7.35 x 10^{22} किग्रा)

= 10^{22} (597- 7.35) किग्रा (10^{22} सार्व लेने पर)

= 10^{22} x 589.65 किग्रा पृथ्वी का द्रव्यमान अधिक है।

इसी प्रकार सूर्य और पृथ्वी के बीच की दूरी 1.496×10^{11} मी और पृथ्वी और चंद्रमा के बीच की दूरी 3.84×10^{8} मी है तो दोनों दूरियों का अंतर

= (1.496 x 10^{11}मी - 3.84 x 10^{8} मी)

= 1.496 x 1000 x 10^{8} - 3.84 x 10^{8}मी

= (1.496 x 1000 - 3.84) 10^{8}मी

= (1496 - 3.84) x 10^{8}मी

= 1492.16 x 10^{8}मी

अतः जब हम मानक रूप में लिखी संख्याओं को घटाते हैं तब हम इन्हें 10 की समान घात में बदलते हैं।

छोटी (सूक्ष्म) संख्याओं की तुलना

लाल रक्त कोशिकाओं का आकार = 0.000007 मी = 7 x 10^{-6} मी

पौधों की कोशिकाओं का आकार = 0.00001275 मी = 1.275 x 10^{-5} मी

दोनों का अंतर = (1.275 x 10^{-5} - 7 x 10^{-6}) मी
= (1.275 x 10^{-5} - 7 x 10^{-1} x 10^{-5}) मी
= (1.275 - 0.7) x 10^{-5} मी
= 0.575 x 10^{-5} मी = 5.75 x 10^{-6} मी

इसे भाग द्वारा तुलना करने पर–

$$\frac{\text{पौधों की कोशिकाओं का आकार}}{\text{लाल रक्त कोशिकाओं का आकार}} = \frac{1.275 \times 10^{-5}\text{मी}}{7 \times 10^{-6}\text{मी}}$$

$$\frac{1.275 \times 10^{-5-(-6)}}{7} = \frac{1.275 \times 10^{1}}{7} = \frac{12.75}{7} \cong 2$$ (लगभग 2 से कम)

बड़ी संख्या की भाग द्वारा तुलना करने पर

सूर्य का व्यास 1.4×10^9m और पृथ्वी का व्यास 1.2756×10^7m है, इनके व्यासों की तुलना करते हैं

$$\frac{\text{सूर्य का व्यास}}{\text{पृथ्वी का व्यास}} = \frac{1.4 \times 10^9 \text{ m}}{1.2756 \times 10^7 \text{m}} = \frac{1.4 \times 10^{9-7}}{1.2756} = \frac{1.4 \times 10^2 \text{ m}}{1.2756}$$

$$= \frac{1.4 \times 100}{1.2756}$$ जो कि लगभग 100 गुणा है।

प्रश्नावली 3.3

1. मानक रूप में बदलिए।
   (i) 128000000 (ii) 1680000000 (iii) 0.0005
   (iv) 0.00000017 (v) 0.000000000397 (vi) 0.00000004358

2. निम्न संख्याओं को सामान्य रूप में व्यक्त कीजिए।
   (i) 4×10^9 (ii) 245×10^7 (iii) 5.61729×10^7
   (iv) 8.5×10^{-6} (v) 3.02×10^{-6} (vi) 7×10^{-4}

3. निम्न कथनों की संख्याओं को मानक रूप में बदलिए।
   (i) मनुष्य के बाल की मोटाई का व्यास लगभग 0.0002 सेमी होती है।
   (ii) एक इलेक्ट्रॉन का आवेश 0.000,000,000,000,000,00016 कुलाम होता है।
   (iii) माईक्रॉन $\frac{1}{1000000}$ मीटर के बराबर होता है।
   (iv) एक कागज की मोटाई 0.0016 सेमी है।

हमने सीखा

1. $(-1)^{\text{सम संख्या}} = 1$ एवं $(-1)^{\text{एक विषम संख्या}} = -1$
2. यदि $\frac{p}{q}$ कोई परिमेय संख्या हो तो $\boxed{\left(\frac{p}{q}\right)^m = \frac{p^m}{q^m}}$
3. यदि $\frac{a}{b}$ कोई परिमेय संख्या हो, तो $\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m}$
4. यदि a शून्य के अतिरिक्त कोई परिमेय संख्या हो तो $a^0 = 1$
5. ऋणात्मक घातांकों का उपयोग करते हुए बहुत छोटी संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त कर सकते हैं।

अध्याय 4

दिमागी कसरत

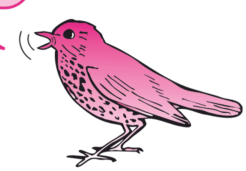
4.1 जब से मानव ने गिनना शुरू किया वहीं से संख्या की शुरूआत हुई। संख्याओं और उनके साथ खेलने की मानवीय प्रवृति ने संख्याओं का बहुत बड़ा संसार खड़ा कर दिया। हमने संख्याओं, उनकी संक्रियाओं और प्रकृति (सम, विषम, भाज्य, अभाज्य) आदि का अध्ययन किया है। हमने स्थानीय मान का भी अध्ययन किया है जैसे 555 में 5 का उपयोग तीन बार हुआ पर प्रत्येक का मान अपने स्थान की वजह से विशिष्ट है। आपने भी वर्ग पहेली, सुडोकु जैसे गणित के खेल खेले होंगे। इस अध्याय में हम संख्याओं के साथ कुछ नये खेल खेलेंगे और उनके पीछे छुपे गणित पर विचार करेंगे।

4.2 संख्याओं का व्यापक रूप

हम दो अंकों की संख्याओं पर विचार करते हैं।

$$27 = 20 + 7$$
$$= 2 \times 10 + 7 \times 1$$
$$69 = 60 + 9$$
$$= 6 \times 10 + 9 \times 1$$
$$90 = 90 + 0$$
$$= 9 \times 10 + 0 \times 1$$

इकाई को 1 से गुणा तथा दहाई को 10 से गुणा करके संख्याओं को दाशमिक प्रणाली में बनाया जाता है।



यह संख्याओं की दाशमिक प्रणाली है।

इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि यदि दहाई का बीजीय अंक a हो तथा इकाई का बीजीय अंक b हो, तो संख्या का मान

$$10 \times a + b = 10a + b$$

$ab = 10 \times a + b = 10a+b$

$56 = 5 \times 10 + 6 = 50 + 6$

यहाँ दो अंको की संख्या में a का मान 1 से 9 तक अंक तथा b का मान 0 से लेकर 9 तक के अंक हो सकते हैं।

संख्याओं में $ab = a \times b$ नहीं होता है।

जैसे 56 को 5x6 नहीं लिखा जा सकता है

आइए अब हम तीन अंकों की संख्याएँ लेते हैं, इन्हें इस प्रकार लिखा जा सकता है।

$$345 = 300 + 40 + 5 = 3 \times 100 + 4 \times 10 + 5 \times 1$$
$$467 = 400 + 60 + 7 = 4 \times 100 + 6 \times 10 + 7 \times 1$$
$$600 = 600 + 0 + 0 = 6 \times 100 + 0 \times 10 + 0 \times 1$$

व्यापक रूप में, अंक a, b और c से बनी किसी तीन अंकों की संख्या abc को इस रूप में लिखा जा सकता है

$$abc = a \times 100 + b \times 10 + c \times 1$$
$$= 100a + 10b + c$$

यहाँ a,b,c बीजीय अंक है तथा a शून्येतर अंक है और b तथा c शून्य से लेकर 9 तक का कोई अंक है । (शून्येतर → 0 को छोड़कर, 1 से 9 तक का कोई भी अंक)

यदि a शून्य हो जाए तो व्यापक संख्या 10b+c हो जाती है।

करो और सीखो

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।
   (i) 42 = ☐ x 10 + 2
   (ii) 60 = ☐ x 10 + ☐
   (iii) 99 = ☐ x ☐ + ☐
   (vi) ☐ = 7 x 100 + 1 x 10 + 8
2. निम्न संख्याओं को सामान्य रूप में लिखिए।
   (i) 10 x 5 + 6
   (ii) 8 x 100+ 0 x 10 + 5
   (iii) 9 x 100 + 9 x 10 + 9

4.3 संख्याओं के साथ खेल

4.3.1 अंकों का पलटना – दो अंकों की संख्या

(i) कक्षा 7 के दो विद्यार्थी चीकू और छोटू का वार्तालाप।

चीकू	छोटू
दो अंकों की संख्या सोचो	69 सोच लिया
इसके अंकों को पलट दो	96 पलट दिया
पहले वाली संख्या में जोड़ दो	69+96=165 कर दिया
प्राप्त संख्या में 11 से भाग दो	$\frac{165}{11}$=15
अब शेषफल शून्य आएगा	हाँ, परन्तु आपने कैसे बताया?

आइये चिकू की चतुराई को समझते हैं। माना छोटी संख्या ab सोचता है। दाशमिक प्रणाली में हम इसे 10a + b लिखेंगे। अंको को पलटने पर 10b + a।

दोनों को जोड़ने पर– $10a + b + 10b + a$

$= 11a + 11b = 11(a + b)$

प्राप्त संख्या सदैव 11 का गुणज होती है, अतः शेषफल हमेशा शून्य तथा भागफल हमेशा (a+b) होता है ।

जैसे– $69 + 96 = 165$

$a = 6$

$b = 9$

$a + b = 6 + 9 = 15$

यहाँ $\frac{165}{11} = 15$

अतः $11 \times 15 = 165$

आप ऐसा दूसरे दोस्तों के साथ खेल सकते हैं।

(ii) चिकू , छोटू को दूसरा खेल करवाता है ।

पुनः दो अंकों की संख्या सोचो (दोनो अंक समान नहीं होने चाहिए)

चीकू	छोटू
दो अंकों की संख्या सोचो	68 सोच लिया
इसके अंकों को पलट दो	86 पलट दिया
पहले वाली संख्या को घटा दो	86 - 68=18 कर दिया
प्राप्त संख्या को 9 से विभाजित करो	$\frac{18}{9}$ =2
शेषफल शून्य होगा	अरे वाह! यह आपको कैसे पता चला

सामान्य रूप में संख्या ab $= 10a + b$

पलटने पर $= 10b + a$

घटाने पर $= 10a + b - (10b + a)$

$= 10a + b - 10b - a$

$= 9a - 9b$

$= 9(a - b)$

इसमे भागफल $= 8 - 6 = 2$ (बडा अंक–छोटा अंक)

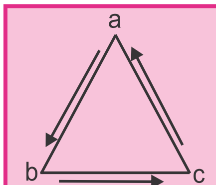
करो और सीखो

जाँच कीजिए कि आप द्वारा सोची गई संख्या निम्नलिखित हो तो क्या परिणाम प्राप्त होते हैं ?
(i) 27 (ii) 67 (iii) 94

4.3.2 अंकों का पलटना – तीन अंकों की संख्या

(i) छोटू ,रामू को तीन अंकों की संख्या सोचने के लिए कहता है।

छोटू	रामू
तीन अंको की कोई संख्या सोचो	हाँ सोच ली 149
अब इन अंको को पलट दो और एक नयी संख्या बनाओ	पलट दिया 941
बड़ी में से छोटी संख्या को घटाओ	घटा लिया 941-149 = 792
आप प्राप्त संख्या को 99 से भाग दीजिए	$\frac{792}{99} = 8$
शेषफल शून्य ही आया होगा ?	हाँ



abc, bca, cab

छोटू की चतुराई कैसे कार्य करती है ? आओ जाने
तीन अंकों की संख्या = abc = 100a + 10b + c
अंकों का पलटने पर cba = 100c + 10b + a
घटाने पर = 100a + 10b + c - (100c + 10b + a)
= 100a + 10b + c - 100c - 10b - a
= 99a - 99c = 99(a - c)
यदि a = c हो तो अन्तर = 0
अतः इकाई व सैंकड़ा का अंक समान नहीं लेना चाहिए।

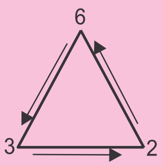
(ii) दिए हुए तीन अंकों से तीन अंकों की संख्या बनाना
आओ एक और खेल खेलते हैं
चिंटु – छोटू कोई तीन अंको की कोई संख्या सोचो
छोटू – ठीक है। मैने संख्या सोच ली।
चिंटु – अब इस संख्या के अंकों से दो अन्य तीन–अंकों की संख्याएँ इस प्रकार बनाओ

जैसे – आपने abc चुनी है, तो
पहली संख्या cab (अर्थात इकाई का अंक सैंकड़ा पर पहुँच गया)
दूसरी संख्या bca (अर्थात cab में इकाई का अंक सैंकड़ा पर पहुँच गया)

अब इन संख्याओं को जोड़ो तथा परिणामी संख्या को 37 से भाग दो
छोटू– शेषफल शून्य होगा।
चिंटू – हाँ, आप सही हो।

जैसे –

$$\begin{array}{r} 632 \\ +\ 263 \\ 326 \\ \hline 1221 \\ \hline \end{array}$$



632, 326, 263

यह चतुराई कैसे कार्य करती है
abc = 100a + 10 b + c
cab = 100 c + 10a + b
bca = 100 b + 10 c + a
abc + cab + bca
= 111 (a+b+c)
= 37x3 (a+b+c)

शेषफल शून्य होगा। $\frac{1221}{37}$ = 33, भागफल = 33, शेषफल = 0

करो और सीखो

जाँच कीजिए कि यदि छोटू ने निम्नलिखित संख्याएँ सोची हैं, तो क्या परिणाम प्राप्त होता है ?

(i) 237 (ii) 119 (iii) 397 (iv) 435

4.4 भाजकता के नियम (बीजगणितीय संदर्भ में)

हमने पूर्व में अंक गणितीय संदर्भ में भाजकता के नियम पढ़े हैं, यहाँ हम बीजगणितीय संदर्भ में अध्ययन करते हैं।

(i) 2 से भाजकता– कक्षा VI में हमने 2 से भाजकता का नियम पढ़ा है यदि किसी संख्या का इकाई का अंक 0, 2, 4, 6 या 8 हो, तो वह संख्या 2 से भाज्य होती है।

स्पष्टतः किसी संख्या .....cba को हम

.....+ 100c + 10b + a के रूप में लिखते हैं इसमें आगे के सभी पद 2 से भाज्य होंगे क्योंकि वे 10, 100, 1000---- का गुणांक होते हैं अर्थात इनके इकाई का अंक हमेशा 0 होता है। पूरी संख्या का 2 से भाज्य होना a पर निर्भर करता है, दी गई संख्या 2 से विभाज्य होगी यदि a = 0, 2, 4, 6 या 8 हो।

करो और सीखो

यदि कोई संख्या N हो तो

		शेषफल	इकाई का अंक	
			सम	विषम
(1)	N÷2	1	-	✓
(2)	N÷ 2	0		
(3)	N÷ 3	1		
(4)	N÷ 3	0		

किसी संख्या की 2, 5 व 10 से भाजकता उसके इकाई के अंक से पता लगा सकते है अर्थात दी हुई संख्या का केवल इकाई के अंक का ही प्रयोग होता है तथा अन्य अंकों से इन पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता। इकाई का अंक हमारे स्थानीय मान पद्वति में महत्वपूर्ण संख्या है।

(ii) 3 और 9 की भाजकता– कोई संख्या 3 से भाज्य होती है यदि उसके समस्त अंकों का योग 3 से भाज्य हो।

जैसे – संख्या 3576 पर विचार करें।

अंकों का योग = 3 + 5 + 7 + 6 = 21

21, 3 से भाज्य है अतः यह संख्या भी 3 से भाज्य होगी।

इसका प्रसारित रूप = 3 x 1000 + 5 x 100 + 7 x 10 + 6 x 1

= 3 x (999+1) + 5 x(99+1) + 7 x (9+1) + 6 x 1

= 3 x 999 + 5 x 99 + 7 x 9 + (3 + 5 + 7 + 6)

क्योंकि 3 + 5 + 7 + 6 = 21, 9 से विभाज्य नहीं है परन्तु 3 से विभाज्य है, इसलिए 3576 संख्या 9 से भाज्य नहीं है परन्तु यह 3 से भाज्य है अतः

(i) कोई संख्या 9 से विभाज्य होती है, यदि उसके अंकों का योग 9 से भाज्य हो।

(ii) कोई संख्या 3 से विभाज्य होती है, यदि उसके अंकों का योग 3 से भाज्य हो।

यदि कोई संख्या cba है तो

$$100c + 10b + a = (99+1)c + (9+1)b + a$$
$$= 99c + 9b + (a+b+c)$$
$$= 9(11c+b) + (a+b+c)$$

अतः 9 एवं 3 से भाजकता तभी सम्भव है जब (a+b+c) क्रमशः 9 और 3 से भाज्य हो।

उदाहरण 1 3148569 की 9 से भाजकता की जाँच कीजिए।

हल 3148569 के अंकों का योग

= 3 + 1 + 4 + 8 + 5 + 6 + 9

= 36

36, 9 से भाज्य है

क्या 36, 3 से भी भाज्य है ?

जाँच–

$= \frac{3148569}{9}$

=349841

पूर्णतः विभाज्य है

उदाहरण 2 यदि तीन अंकों की संख्या 34A, 9 से भाज्य है, तो A का मान का होगा?

हल अंकों का योग

3+4+A = 7+A

7+A, 9 से भाज्य होना चाहिए।

यह तभी सम्भव है, जब 7 + A या तो 9 हो या 18 हो।

क्योंकि A एक अंक है, इसलिए 7 + A = 9 होगा–

अतः A = 9 - 7

= 2 होगा।

करो और सीखो

79y, 9 से विभाज्य है तो क्या y के एक से अधिक मान सम्भव है ?

(iii) 11 से भाजकता – किसी संख्या के 11 से भाजकता की जाँच करने के लिए उस संख्या के इकाई, दहाई सैंकड़ा, हजार, दस हजार, लाख, दस लाख..............वाले अंकों में क्रमानुसार 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1,.. का गुणा कर इसका योगफल ज्ञात करते हैं यदि योगफल 11 से पूरा–पूरा विभाजित होता है, तो वह संख्या 11 से पूर्णतः विभाजित होती है।

उदाहरण 3 संख्या 89, 62, 426 की 11 से भाजकता की जाँच कीजिए।

हल उपर्युक्त नियमानुसार

= 6 x1 + 2x(-1)+ 4 x1 + 2x(-1) + 6 x1 + 9x(-1) + 8 x1

= 6 - 2 + 4 - 2 + 6 - 9 + 8

= 11 जो 11 से विभाज्य है।

अतः 89, 62, 426, 11 से विभाज्य है।

अब abcd चार अंकों की संख्या का व्यापक रूप

M = 1000a + 100b + 10c + d लेने पर

नियमानुसार

N = dx1 + cx(-1) + bx1 + ax(-1)

= -a+b-c+d

M - N = (1000a+100b+10c+d) -(-a+b-c+d)

= 1001a + 99b +11c

= 11(99a + 9b +c), जो 11 से भाज्य है।

यदि M , 11 से भाज्य है तो N भी 11 से भाज्य होगा।

विलोमतः यदि N, 11 से भाज्य है तो M भी 11 से भाज्य होगा।

करो और सीखो

(i) संख्या 56, 29, 003 की 11 से भाजकता की जाँच कीजिए।

प्रश्नावली 4.1

1. यदि तीन अंकों की एक संख्या 24x, 9 से विभाजित होती है, तो x का मान बताइए, जहाँ x एक अंक है।
2. यदि तीन अंकों की संख्या 89y, 9 से विभाजित होती है तो y के क्या– क्या मान हो सकते हैं, ज्ञात कीजिए।
3. 31M5, 9 का एक गुणज है जहाँ M एक अंक है, तो M के दो मान आते हैं। ऐसा क्यों ?
4. तीन अंको की संख्या 24y, 3 का एक गुणज है, तो y के क्या–क्या मान होंगे ?
5. निम्न संख्याओं की 3, 9 व 11 से भाजकता की जाँच कीजिए।

   (i) 294 (ii) 4455 (iii) 1041966
6. यदि संख्या 31R1 में R = 4 हो, तो भाजकता नियम से ज्ञात कीजिए यह 11 से विभाज्य है या नहीं।
7. यदि 31P5, 3 का गुणज है, जहाँ P एक अंक है, तो P के मान क्या हो सकते हैं ?

4.5 चार मूल संक्रियाओं (+, -, x तथा ÷) में रिक्त संख्याओं को ज्ञात करना

(i) निम्नांकित योग–संक्रिया का अवलोकन कीजिए

$$\begin{array}{r} 2\,* \\ 4\,6 \\ +\;9\,7 \\ \hline 166 \\ \hline \end{array}$$

ध्यान दीजिए कि उपर्युक्त योग–संक्रिया में प्रतीक * लुप्त अंक है जिसका मान ज्ञात किया जाना है।

अब इकाई के अंको का योगफल = * + 6 + 7
= * + 13
= * + 10 + 3
= 10 + (* + 3)

अतः योगफल में इकाई का अंक = * + 3 = 6
* = 6 - 3
= 3 अर्थात् लुप्त अंक 3 है।

पुनः देखिए–

```
    45
+   *8
+   78
   171
```

यहाँ इकाई के अंकों का योगफल = 5+8+8 = 21

जहाँ 2 दहाई का अंक है अतः योग संक्रिया में इसे बाईं ओर हासिल के रूप में दहाई के अंक के स्थान पर स्थानान्तरित किया जाएगा। अतः अब दहाई के अंकों का योगफल

= 2+4+*+7
= * + 13

जो उपर्युक्त योगफल में 17 के बराबर है, अतः

* + 13 = 17
* = 17 - 13
= 4

करो और सीखो

उपर्युक्त की भांति निम्नांकित योग संक्रियाओं मे लुप्त अंकों के मान ज्ञात कीजिए।

```
(i)    3*     (ii)    56     (iii)   443     (iv)    82
     + 57           + 77           + *57           + 55
     + 34           + *3           + 128           + 99
      127            216             928            *36
```

(ii) अब निम्नांकित व्यवकलन (घटाने) की संक्रिया का अवलोकन कीजिए–

```
   83
-  *2
   51
```

यहाँ दहाई के स्थान पर व्यवकलन संक्रिया में,

8 - * = 5 जहाँ * लुप्त अंक का प्रतीक है

अतः* = 8 - 5
* = 3

पुनः देखिए

```
   83
-  2*
   55
```

यहाँ इकाई का स्थान पर 3 में से * (लुप्त अंक) घटाने पर 5 प्राप्त है जिससे स्पष्ट है कि * का अंकीय मान 3 से बड़ा है। अतः घटाने की संक्रिया सम्पन्न करने के लिए दहाई के स्थान से 8 में से एक दहाई को दाईं ओर इकाई के स्थान पर स्थानान्तरित करना होगा ।

अतः (10+3) - * = 5

$\therefore$ * = (10+3) - 5 = 8

यहाँ यह भी स्पष्ट है कि दहाई के स्थान से एक दहाई, इकाई के स्थान पर स्थानान्तरित करने पर अब वहाँ शेष दहाइयाँ = 8 - 1 = 7

अतः 7 में से 2 घटाने पर 5 प्राप्त होता है, जो दिया है।

करो और सीखो

निम्नांकित व्यवकलन संक्रियाओं में लुप्त अंकों के मान ज्ञात कीजिए।

(i) $\begin{array}{r} 76 \\ -\ 5* \\ \hline 25 \\ \hline \end{array}$ (ii) $\begin{array}{r} 54 \\ -\ 2* \\ \hline 28 \\ \hline \end{array}$ (iii) $\begin{array}{r} 84 \\ -\ *8 \\ \hline 16 \\ \hline \end{array}$ (iv) $\begin{array}{r} 803 \\ -\ 2*6 \\ \hline 567 \\ \hline \end{array}$ (v) $\begin{array}{r} 782 \\ -\ *73 \\ \hline 209 \\ \hline \end{array}$

(iii) निम्नांकित गुणन – संक्रिया का अवलोकन कीजिए।

ध्यान दें, यहाँ 46 x 2 $\boxed{x}$ = 1104 में गुणक के इकाई के स्थान पर अक्षर संख्या x है। x का मान ज्ञात करना है।

$$46 \times 2\boxed{x} = 46 \times (20+x)$$
$$= 920 + 46x = 1104$$

अतः

$$920 + 46x = 1104$$
$$46x = 1104-920$$
$$46x = 184$$
$$x = \frac{184}{46} \qquad x = 4$$

पुनः अवलोकन कीजिए $\begin{array}{r} \boxed{x}5 \\ \times\ 37 \\ \hline 3145 \\ \hline \end{array}$

यहाँ $\boxed{x}$ दहाई के रिक्त स्थान पर अक्षर संख्या x लिखी है जिसका मान ज्ञात करना है।

$$x5 \times 37 = (10x + 5) \times 37$$
$$= 370x + 185$$

अतः

$$370x + 185 = 3145$$
$$370x = 3145 - 185$$
$$370x = 2960$$
$$x = \frac{2960}{370} \quad \text{या} \quad x = 8$$

करो और सीखो

निम्नांकित गुणन– संक्रियाओं में बीजीय व्यंजकों के अंकीय मान ज्ञात कीजिए

(i) $\begin{array}{r} 56 \\ \times\ \boxed{x}5 \\ \hline 1400 \\ \hline \end{array}$ (ii) $\begin{array}{r} 4\boxed{x} \\ \times\ 37 \\ \hline 1554 \\ \hline \end{array}$ (iii) $\begin{array}{r} 23 \\ \times\ 3\boxed{x} \\ \hline 736 \\ \hline \end{array}$

(iv) निम्नांकित भाग–संक्रिया का अवलोकन कीजिए।

$x3)\ 78\ (6$

$\begin{array}{c} -- \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}$

यहाँ भाजक में दहाई के स्थान पर अक्षर संख्या x लिखी है जिसका मान ज्ञात करना है।

भाग–संक्रिया के नियम से हम जानते हैं कि–

भाज्य = भाजक x भागफल + शेषफल

अर्थात् $78 = x3 \times 6 + 0$

$78 = (10x + 3) \times 6 \quad [\because x3 = 10x + 3]$

$78 = 60x + 18$

$78 - 18 = 60x$

$60 = 60x$

$x = \frac{60}{60} \qquad x = 1$

अतः भाजक संख्या = 13 है

पुनः अवलोकन कीजिए $2\boxed{x})\ 229\ (9$

$\begin{array}{c} --- \\ \hline 4 \\ \hline \end{array}$

जहाँ भाजक के इकाई के रिक्त स्थान पर अक्षर संख्या x है जिसका मान ज्ञात करना है। भाग संक्रिया के नियमानुसार $2x \times 9 + 4 = 229$

$(20 + x) \times 9 = 229 - 4$

$180 + 9x = 225$

$9x = 225 - 180$

$9x = 45$

$x = \frac{45}{9} \qquad x = 5$

करो और सीखो

निम्नांकित भाग संक्रियाओं में x के अंकीय मान ज्ञात कीजिए।

(i) $27)\ 217\ (x$ $\begin{array}{c} --- \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}$ (ii) $x6)\ 100\ (6$ $\begin{array}{c} --- \\ \hline 4 \\ \hline \end{array}$ (iii) $1x)\ 120\ (9$ $\begin{array}{c} --- \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}$

4.6 कुछ और तरीके

(i) अंकों के लिए अक्षर

यहाँ कुछ ऐसी पहेलियाँ हैं जहाँ एक अंकगणितीय प्रश्न में अंकों के स्थान पर अक्षर होते हैं तथा समस्या यह ज्ञात करने की है कि कौन–सा अक्षर किस अंक को निरूपित करता है ? प्रायः ऐसी पहेलियों को हल करते समय अपनाए जाने वाले नियम निम्न प्रकार हैः –

1. पहेली में, प्रत्येक अक्षर केवल एक ही अंक को प्रदर्शित करना चाहिए।
2. किसी भी संख्या का पहला अंक शून्य नहीं हो सकता। जैसे संख्या छप्पन को 056 या 0056 न लिखकर केवल 56 लिखते हैं।

[A] निम्नलिखित योग में P ज्ञात कीजिए।

$$\begin{array}{r} 52P \\ +\ 1P3 \\ \hline 711 \\ \hline \end{array}$$

हलः यहाँ केवल एक अक्षर P है जिसका हमें मान ज्ञात करना है।

इकाई के स्तंभ में, P + 3 से हमें 1 प्राप्त होता है अर्थात् 3 में वह संख्या जोड़ें जिससे इकाई का अंक 1 प्राप्त हो।

ऐसा होने के लिए P का मान अंक 8 होना चाहिए क्योंकि 8 में 3 जोड़ने पर इकाई का स्थान 1 होता है।

$$\begin{array}{r} 528 \\ +\ 183 \\ \hline 711 \\ \hline \end{array}$$

अर्थात् P = 8

[B] P और Q का मान ज्ञात कीजिए

$$\begin{array}{r} QP \\ \times\ Q6 \\ \hline 62P \\ \hline \end{array}$$

यहाँ भी दो अक्षर P और Q हैं जिनके मान ज्ञात किए जाने हैं क्योंकि 6 x P के इकाई का अंक P है इसलिए

P = 4 (क्यों ?)

अब Q=1 रखे तो 14x16 = 224 जो कि कम हैं

यदि Q=3 रखे तो 34x36 = 1224 जो कि अधिक हैं

अतः Q=2 रखे पर 24x26 = 624 जो कि सही है।

अतः

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times\ 26 \\ \hline 624 \\ \hline \end{array}$$

जहाँ P = 4, Q = 2

प्रश्नावली 4.2

1. निम्नलिखित में से प्रत्येक में अक्षरों के मान ज्ञात कीजिए तथा संबद्ध चरणों के लिए कारण भी दीजिए।

(i) $\begin{array}{r} 5A \\ +\ \ 34 \\ \hline B2 \\ \hline \end{array}$ (ii) $\begin{array}{r} 5A \\ +\ \ 79 \\ \hline CB3 \\ \hline \end{array}$ (iii) $\begin{array}{r} AB \\ +\ \ 37 \\ \hline 6A \\ \hline \end{array}$ (iv) $\begin{array}{r} 5AB \\ +\ AB1 \\ \hline B98 \\ \hline \end{array}$

(v) $\begin{array}{r} 12A \\ +\ 6AB \\ \hline A09 \\ \hline \end{array}$ (vi) $\begin{array}{r} 1\ A \\ \times\ \ \ A \\ \hline 9\ A \\ \hline \end{array}$ (vii) $\begin{array}{r} AB \\ \times\ \ \ B \\ \hline CAB \\ \hline \end{array}$ (viii) $\begin{array}{r} AB \\ \times\ \ \ 6 \\ \hline BBB \\ \hline \end{array}$

2. निम्नलिखित प्रश्नों में लुप्त अंकों (*) या x के मान ज्ञात कीजिए।

(i) $\begin{array}{r} 2\ * \\ *\ 8 \\ +\ 9\ 5 \\ \hline 1\ 6\ 7 \\ \hline \end{array}$ (ii) $\begin{array}{r} 905 \\ *12 \\ +\ 88* \\ \hline 2100 \\ \hline \end{array}$ (iii) $\begin{array}{r} 7*3 \\ -\ 281 \\ \hline 432 \\ \hline \end{array}$

(iv) $\begin{array}{r} 5\ 7 \\ -\ \ 3\ * \\ \hline 1\ 8 \\ \hline \end{array}$ (v) $\begin{array}{r} 68 \\ \times\ \ \ \boxed{x} \\ \hline 408 \\ \hline \end{array}$ (vi) $\begin{array}{r} 7\ 6\ 3 \\ \times\ \ \ 3\boxed{x} \\ \hline 25942 \\ \hline \end{array}$

(vii) $2x\overline{)216}(8$
$\begin{array}{r} \text{- - -} \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}$

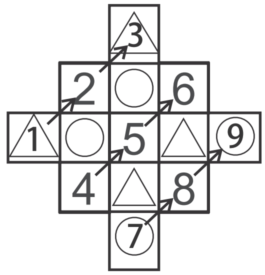
(viii) $x7\overline{)907}(24$
$\begin{array}{r} \text{- - -} \\ \hline 19 \\ \hline \end{array}$

4.7 वर्ग पहेली

[A] आओ कुछ वर्ग पहेलियों पर विचार करते हैं। पहले हम 3 x 3 की एक वर्ग पहेली लेते हैं इनमें 1 से 9 तक के अंकों को भरा गया है।

2	7	6
9	5	1
4	3	8

इसमें उर्ध्वाधर (खड़ी) व क्षैतिज (आड़ी) वर्गों में अंकों का योग कितना है?
क्या यह मान समान आता है?
इनमें अंकों को किस प्रकार भरा जाता है आओ पता लगाएँ। चित्रानुसार मध्य वर्ग के ऊपर एक वर्ग बनाएँगे। और तीर की दिशा (⟶⟶ में) क्रमानुसार संख्याओं को भरते हैं बढ़ाए गए वर्गों के अंक △ का △ में तथा ○ का ○ में विपरीत ओर भरते हैं।



[B] आओ एक ओर वर्ग पहेली पर विचार करते है– यहाँ हम संकेतों में लिखे अंको को, △ को △ से, ○ को ○ से ◇ को ◇ तथा ⌂ को ⌂ विकर्णानुसार बदलते हैं तो उर्ध्वाधर एवं क्षैतिज वर्गों का योग कितना आएगा ? पता करें यह 4 x 4 की वर्ग पहेली है।

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

4 x 4 की वर्ग पहेली में 2 से 17 तक के अंक भरते हैं तो योग कितना आएगा ?

करो और सीखो

1. 3 x 3 के वर्ग में संख्याओं को इस प्रकार भरो की इनके आड़े, खड़े एवं तिरछे खानों का योग समान हो जाए–
   1. 2 से 10 तक 2. 5 से 13 तक 3. 11 से 19 तक
2. 4 x 4 के वर्ग को इस प्रकार भरो की इनके आड़े, खड़े और तिरछे खानों का योग समान हो जाए–
   1. 11 से 26 तक 2. 5 से 20 तक 3. 2 से 17 तक

हमने सीखा

1. संख्याओं को व्यापक रूप में लिखना एवं समझना। दो अंकों की संख्या ab को 10a + b तथा तीन अंकों की संख्या abc को 100a + 10b + c के रूप में लिखना और समझना जहाँ a, b, c 0 से 9 तक के अंक हैं तथा $a \neq 0$।
2. सामान्य रूप से दो और तीन अंको की संख्याओं के लिए 2, 3, 5, 9, 10, 11 के विभाजन नियमों को व्युत्पन्न करना।
3. संख्या 2, 3, 5, 9, 10, 11 के विभाजन नियमों से संबंधित तर्क की जानकारी।
4. संख्याओं की पहेलियाँ और खेल।

अध्याय 5

वैदिक गणित

5.1 इस कक्षा में वैदिक गणित के अध्याय में आप उर्ध्वतिर्यक सूत्र से दो एवं तीन अंकों की संख्याओं का गुणा करना, सूत्र निखिलम आधार एवं उपाधार के अन्तर्गत तीन संख्याओं का गुणा एवं घनफल के साथ– साथ ध्वजांक विधि से भाग करना सीखेंगे।

5.1.1 गुणनसंक्रिया (उर्ध्वतिर्यग्भ्याम् सूत्र)

उर्ध्वतिर्यक सूत्र पर आधारित विधि से कोई भी गुणा किया जा सकता है। सूत्र का प्रथम शब्द उर्ध्व का अर्थ ठीक ऊपर (ऊपर–नीचे लिखे अंकों का गुणा) इसी प्रकार दूसरे शब्द तिर्यक का अर्थ है तिरछा (तिरछे लिखे अंकों का गुणा) है।

उदाहरण 1 आइए 32 व 14 का गुणा करते हैं।

चरण 1. गुण्य 32 व गुणक 14 को गुणा के लिए इस तरह लिखते हैं–

$$\begin{array}{r} 32 \\ \times\,14 \\ \hline \end{array}$$

चरण 2. समूह बनाना– दो अंकों का दो अंकों से गुणा में तीन समूह होंगे। जिसे III II व I द्वारा दर्शाया गया है।

	III	II	I
समूह बनाना	3	3 2	2
	1	1 4	4

> गुणा करते समय समूह की संख्या (2 n -1) से ज्ञात करेंगे।
> जहाँ n = गुण्य व गुणक में अधिकतम अंको की संख्या यहाँ 32 व 14 में अधिकतम अंक = 2
> अतः 2 x 2 -1 = 3 समूह

चरण 3. गुणन क्रिया 3x1 / 3x4+1x2 / 2x4

चरण 4. गुणनफल 3 / 12+2 / 8

चरण 5 3 / 14 / 8

चरण 6 पंक्ति–1 3 4 8
पंक्ति–2 1

चरण 7 योग क्रिया 4 4 8

या 3 / 4 / 8 (जहाँ 3+1=4)
+1
4 4 8

अतः 32 x 14 का अभीष्ट गुणनफल = 448 प्राप्त होता है।

> प्रत्येक समूह में एक–एक अंक रहेगा यहाँ II समूह में 14 है जो दहाई का अंक 1 III में योग होगा।

उदाहरण 2 123 x 45 का गुणा उर्ध्वतिर्यग्भ्याम् विधि से करना।

चरण 1. 123 गुण्य व 45 गुणक है। गुणक को तीन अंकों में बनाने के लिए 045 लिखेंगे।

$$\begin{array}{r} 123 \\ \times\ 45 \\ \hline \end{array}$$

चरण 2. तीन अंकों की संख्या में समूहों की संख्या 5 होगी। जो V, IV, III, II, I है।

V	IV	III	II	I
1	1 2	1 2 3	2 3	3
0	0 4	0 4 5	4 5	5

चरण 3. गुणन क्रिया व गुणनफल

गुणन क्रिया 1x0/1x4+2x0/1x5+3x0+2x4/2x5+3x4/3x5

गुणनफल 0 / 4+0 / 5+0+8 / 10+12 / 15

योग क्रिया 0 / 4 / 13 / 22 / 15

चरण 4 प्रथम द्वितीय व तृतीय भाग में 2 अंक हैं लेकिन आधार 10 होने से प्रत्येक भाग में एक अंक ही रखा जाता है अतः प्रथम द्वितीय व तृतीय भाग के इकाई अंक को पंक्ति 1 में एवं दहाई अंक को पंक्ति 2 में एक स्थान आगे लिखकर संख्याओं को समायोजित कर योग करते हैं।

पंक्ति–1	4	3	2	5
पंक्ति–2	1	2	1	-
चरण 5. योग क्रिया	5	5	3	5

अतः 123 x 45 का अभीष्ट गुणनफल = 5535

उदाहरण 3 57 x 68 का गुणा कीजिए।

समूह की संख्या = 3

$$\begin{array}{c} 57 \\ \times\ 68 \\ \hline 5x6/5x8+6x7/7x8 \\ 30\ /\ 40+42\ /\ 56 \\ 30\ /\ 82\ /\ 56 \\ 3876 \end{array}$$

(जहाँ 82+5=87 में 7 दहाई पर व 8 आगे 30 में जुड़कर 38 बनते हैं।)

अतः अभीष्ट गुणनफल 3876

उदाहरण 4 349 x 986 का गुणा कीजिए।

समूह की संख्या = 5

```
                3   4   9
              x 9   8   6
-------------------------------------------
3x9 / 3x8+4x9 / 3x6+9x9+4x8 / 4x6+9x8 / 9x6
 27 / 24+ 36  / 18+ 81+ 32  / 24+ 72  / 54
       27 / 60 / 131 / 96 / 54
```

संख्याओं को पंक्तिवार व्यवस्थित कर योग करते हुए

```
  ① 7  0  1  6  4        पंक्ति–1
 2  6  3  9  5           पंक्ति–2
    1                    पंक्ति–3
--------------------
 3  4  4  1  1  4
--------------------
```

अतः संख्या 349 x 986 का अभीष्ट गुणनफल = 344114 प्राप्त होता है।

करो और सीखो

1. उर्ध्वतिर्यग्भ्याम् सूत्र का उपयोग करते हुए गुणा कीजिए।

(i) 15 x 12	(ii) 60 x 18
(iii) 71 x 8	(iv) 122 x 4
(v) 706 x 56	(vi) 497 x 173

5.1.2 सूत्र निखिलम् (उपाधार) से गुणा

निखिलम् द्वारा किसी प्रश्न के बड़े विचलन प्राप्त हो जाते हैं कि उनका गुणा कठिन हो जाता है जैसे 32 x 34 में यदि आधार 10 लेते हैं तो इनका विचलन 22 व 24 का गुणा बड़ा हो जाता है। अतः निकटतम दहाई के आधार पर उपाधार का चयन करते है जिससे उपाधार से विचलन छोटा प्राप्त होता है। जैसे – 68 x 66 में उपाधार 7 x 10 = 70 लेते है एवं 32 x 27 में उपाधार 3 x 10 = 30 लेते है शेष विधि पूर्व की भाँति है।

उदाहरण 5 32 x 34 का मान ज्ञात कीजिए।

चरण 1.

```
संख्या    विचलन–
  32        + 2
  34        + 4
-------------------
        /
```

चरण 2. हल दो खण्डों में होगा

```
32        + 2
34        + 4
-----------------
       /    8
```

संकेत

(i) आधार = 10, उपाधार = 3 x 10 = 30

(ii) उपाधार अंक = उपाधार ÷ आधार = 30 ÷ 10 = 3

(iii) उपाधार से विचलन = संख्या – आधार

= 32 - 30 = +2

= 34 - 30 = +4

(दाहिने पक्ष में विचलनों का गुणा = 2 x 4 = 8)

चरण 3.

बाएँ पक्ष में कोई एक संख्या और शेष संख्या का विचलन का योग करके उसे उपाधार अंक 3 से गुणा करेंगे।

32	+ 2
34	+ 4
108 /	

(जहाँ 32 + 4 = 36 या 34 + 2 = 36 एवं 3 x 36 = 108)

चरण 4.

चरण 1 से 3 तक समेकित करना व संक्रिया कर व्यवस्थित करना।

32	+ 2
34	+ 4
= 108 /	8

= 1088 तिरछी रेखा हटाने पर

अतः 32 x 34 का अभीष्ट गुणनफल = 1088

उदाहरण 6 54 x 57 को हल कीजिए।

पूर्व उदाहरण के चरण 4 का सीधा उपयोग करना–

संख्या	विचलन
54	+4
57	+7

5{(54+7) या (57+4)} / 4x7

= 5 x 61 / 28

= 305 / $_2$8

= 3078

संकेत

(i) आधार = 10 उपाधार = 5 x 10 = 50

(ii) उपाधार अंक = 5

(iii) उपाधार से विचलन =+ 4 व +7

(iv) आधार 10 में एक शून्य से दाहिने पक्ष में एक अंक ही होगा।

(v) दहाई का अंक बाएँ पक्ष में जोड़ने पर = 305 + 2 = 307

उदाहरण 7 78 x 76 को हल कीजिए।

संख्या	विचलन
78	-2
76	-4

=8x (78-4) / -2x-4

=8 x74 / 8

=592 / 8

=5928

संकेत

(i) आधार 10, उपाधार = 8 x 10 = 80

(ii) उपाधार अंक = 8

(iii) उपाधार से विचलन = - 2 व - 4

उदाहरण 8 63 x 58 को हल कीजिए।

संख्या	हल
63	+3
58	- 2

= 6x (63-2) / + 3x-2

= 6 x (61) / -6

= 366 / -6

= 365+1 / -6

= 365 / 10-6

= 365 / 4

= 3654

संकेत

(i) आधार = 10, उपाधार = 6 x 10 = 60

(ii) उपाधार अंक = 6

(iii) उपाधार से विचलन = (63 - 60 = + 3 व 58 - 60 = -2) = +3 व -2

(iv) आधार दाहिने पक्ष में विचलनों का गुणा = 3 x - 2 = -6 जो ऋणात्मक है अतः धनात्मक के लिए बाएँ पक्ष से 1 दहाई = 10 को इकाई पक्ष में लेने पर 10 - 6 = 4 होगा।

(v) अतः गुणनफल = 3654

करो और सीखो ◆ निम्न का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

(i) 11 x 15 (ii) 12 x 18 (iii) 19 x 17

(iv) 28 x 22 (v) 51 x 49 (vi) 99 x 96

5.2 तीन संख्याओं का गुणन

5.2.1 सूत्र निखिलम् (आधार)

सूत्र निखिलम् द्वारा तीन संख्याओं का गुणनफल भी सरलता से किया जा सकता है जिनका विचलन समान आधार 10 या 10 की घात के सापेक्ष प्राप्त हो–

आइए इसे समझने का प्रयास करते हैं।

उदाहरण 9 12 x 13 x 17 का गुणा कीजिए।

चरण 1 12 , 13 , 17 का आधार = 10 एवं विचलन +2, +3, +7 लेते हैं।

संख्या	विचलन
12	+2
13	+3
17	+7

चरण 2 हल तीन खण्ड में होगा जिन्हें क्रमशः दाएँ भाग, मध्य भाग एवं बाएँ भाग से जाना जाएगा। दाएँ भाग में तीनों विचलनों का गुणा करते हैं।

संख्या	विचलन
12	+2
13	+3
17	+7
	/ 2x3x7

चरण 3 मध्य भाग में दो–दो विचलनों के गुणनफलों एवं उन का योग करते हैं। विचलन चरण में 2×3, 3×7 व 7×2 है।

$$\begin{array}{ll} 12 & +2 \\ 13 & +3 \\ 17 & +7 \\ \hline \multicolumn{2}{l}{/\ 2x3+3x7+2x7\ /} \end{array}$$

चरण 4 बाएँ भाग में कोई एक संख्या और शेष दो संख्याओं का विचलन यानि $12 + 3 + 7$ या $13 + 2 + 7$ या $17 + 3 + 2$ में से कोई एक लेते हैं।

संख्या	विचलन
12	+ 2
13	+ 3
17	+ 7

$12 + 3 + 7 = 22$ /
या
$13 + 2 + 7 = 22$
या
$17 + 3 + 2 = 22$

चरण 5 चरण 1 से 4 को समेकित करते हैं व संक्रिया कर व्यवस्थित करते हैं।

संख्या	विचलन
12	+2
13	+3
17	+7

(आधार 10 होने से मध्य पद को 1 से व बाएँ पद को 1^2 से गुणा)

$$1^2\,(12+3+7)\,/\,1\,(2x3+3x7+2x7)\,/\,2x3x7$$

$$= 22\,/\,6 + 21 + 14\,/\,42$$

$$= 22\,/\,41\,/\,42$$

$$= 22\,/_4\,1\,/_4\,2$$

$$= 2\ 6\ 5\ 2$$

(आधार 10 में एक शून्य है अतः दाएँ भाग व मध्य भाग में एक–एक अंक ही रहेगा। दूसरा अगले पद में ले जाएँगें जैसे 42 में 4 को मध्य पद में एव 2 दाहिने पद में रहेगा। 41 तथा में 4 जुडकर 45 होंगे जिसमे 5 मध्य पद में एव 4 बाएँ पक्ष 22 में जुड जाएगा।)

संख्या $12 \times 13 \times 17$ का अभीष्ट गुणनफल = 2652

उदाहरण 10 9 x 8 x 15 का गुणा सूत्र निखिलम् (आधार 10) द्वारा करना।

संख्या	विचलन	समान आधार = 10
9	-1	(आधार = 10, विचलन = -1)
8	-2	(आधार = 10, विचलन = -2)
15	+5	(आधार = 10, विचलन = +5)

पूर्व उदाहरण के चरण 5 का सीधा उपयोग करना–

संख्या	विचलन
9	-1
8	-2
15	+5

1^2 (15-2-1) / 1{5x(-2)+(-2)x(-1)+(5)x(-1)} / (-1)x(-2)x(5) (आधार 10 होने से मध्य पद को उपाधार 1 व बाएँ पद को उपाधार 1^2 से गुणा)

12 / -10 +2- 5 / 10

12 / -15 + 2 / 10

10+2 / -13 / 10 (12 = 10 + 2)

10 / 20 - 13 / 10

बाएँ पक्ष से 2 को मध्य खण्ड में 2 x 10 = 20 लेकर 20 - 13 = 7 लिखेंगे।

10 / 7 / $_1$0

1080

उदाहरण 11 22 x 23 x 24 का गुणा सूत्र निखिलम् (उपाधार) द्वारा करना।

22	+2	आधार = 10 उपाधार = 10 x 2 = 20
23	+3	उपाधार अंक = 2
24	+4	उपाधार से विचलन = +2, +3, +4

2^2 (22+3+4) / 2{2x3+3x4+4x2} / 2x3x4

= 2^2 (29) / 2 (6+12+8) / 24

= 4 (29) / 2 (26) / 24

= 116 / $_5$2 / $_2$4

= 12144

उपाधार 2 x 10 होने से मध्य पद को उपाधार अंक 2 व बाएँ पद को उपाधार 2^2 से गुणा

संख्या 22 x 23 x 24 का अभीष्ट गुणनफल = 12144 होगा।

उदाहरण 12 101 x 102 x 103 का सूत्र निखिलम् द्वारा गुणा करना।

समान आधार = 100

101	+01	(विचलन = +01)
102	+02	(विचलन = +02)
103	+03	(विचलन = +03)

101+2+3 / 2x3+1x2+3x1 / 06

= 101+2+3 / 6+2+3 / 06

= 106/11/06

= 1061106

ध्यान रहे आधार 100 होने से दाएँ और मध्य पद में दो–दो अंक रहेंगे क्योंकि आधार 100 में दो शून्य है अतः दाएँ में 6 के स्थान पर 06 लिखेंगे।

उदाहरण 13 99 x 98 x 97 का सूत्र निखिलम् द्वारा गुणा करना।

समान आधार 100

99	- 01	(विचलन = - 01)
98	- 02	(विचलन = - 02)
97	- 03	(विचलन = - 03)

99-02-03 / (-02)x(-03)+(-01)x(-02)+(-03)x(-01) / (-01)x(-02)x(-03)

= 94 / 6+2+3 / $\overline{06}$

= 94/11/$\overline{06}$

= 94/10/$_1\overline{06}$

मध्य पद से 1 को दाएँ भाग में 1 x 100 = 100 के रूप में लेंगे।

= 94/10/ 100-6

= 941094

करो और सीखो

तीन संख्याओं का गुणा सूत्र निखिलम् द्वारा ज्ञात कीजिए।

(i) 11 x 12 x 13 (ii) 8 x 9 x 10

(iii) 6 x 7 x 8 (iv) 27 x 28 x 29

(v) 98 x 99 x 99 (vi) 51 x 52 x 53

5.3 घनफल

घन संख्याएँ 1, 8, 27, 64 - - - - - - हैं जो किसी संख्या को उसी संख्या से तीन बार गुणा करने पर प्राप्त होती है जैसे –

$$1 \times 1 \times 1 = 1$$
$$2 \times 2 \times 2 = 8$$
$$3 \times 3 \times 3 = 27$$
- - - - - - - -

घन संख्याओं को घात 3 से प्रदर्शित करते हैं। जैसे 2 का घनफल 2^3, 3 का घन 3^3 होगा। सूत्र निखिलम् द्वारा तीन संख्याओं के गुणा के बारे में अध्ययन कर चुके है। घनफल ज्ञात करने के लिए वही प्रक्रिया दोहराएँगे यहाँ तीनों संख्याएँ समान हैं।

उदाहरण 14 11 x 11 x 11 का सूत्र निखिलम् द्वारा गुणा करना।

आधार = 10

11	+1	(विचलन = +1)
11	+1	(विचलन = +1)
11	+1	(विचलन = + 1)

11+1+1 / (1)x(1)+(1)x(1)+(1)x(1)/ (1)x(1)x(1)

अर्थात् **संख्या +2 x (विचलन)/3 (विचलन)^2/ (विचलन)^3**

मानक रूप में लिखा गया है। अब हम मानक रूप का उपयोग कर हल करेंगे।

उदाहरण 15 15 का घनफल ज्ञात कीजिए।

15 में संख्या 15 व विचलन 5 है तो

$$(15)^3 = 15 + 2 \times 5 / 3 \times 5^2 / 5^3$$

$$= 15 + 10 / 75 / 125$$

$$= 25 / 75 / 125$$

संख्याओं को पंक्तिवार व्यवस्थित कर योग करते हुए

I	2	5	5	5
II		7	2	-
III		1	-	-
	3	3	7	5

या

25/75/5 (12)

25/8 7/5

= 33/7/ 5

= 3375

अतः संख्या 15 x 15 x 15 का अभीष्ट गुणनफल 3375 होगा।

उदाहरण 16 103 का घनफल ज्ञात कीजिए।

हल आधार = 100, विचलन =+03

$103^3 = 103 + 2 \times 3 / 3 \times (03)^2 / (03)^3$

$= 103 + 6 / 27 / 27$

$= 1092727$

उदाहरण 17 96 का घनफल ज्ञात कीजिए।

हल आधार =100, विचलन (= -04)

$96^3 = 96 + 2 \times (-04) / 3 \times (-04)^2 / (-04)^3$

$= 96 - 08 / 3 \times 16 / -64$

$= 88 / 48 / -64$

$= 88 / 48 / 1\text{-}64$ (1 सैकड़े के स्थान पर है अतः 1 का तात्पर्य 100 इकाई है)

$= 88 / 47 / 100-64$

$= 88 / 47 / 36$

$= 884736$

5.4 ध्वजांक विधि

यह अनुप्रयोग सूत्र ऊर्ध्वतिर्यक एवं सूत्र ध्वजांक पर आधारित है और इस विधि से भाग संक्रिया का प्रत्येक प्रश्न बड़ी सरलता से हल किया जा सकता है संक्रिया प्रारंभ करने से पूर्व प्रश्न लिखते समय निम्न बिन्दु ध्यान रखने योग्य है।

(1) सर्वप्रथम भाजक को सुविधाजनक दो भागों में विभाजित करते हैं। भाजक के इकाईयुक्त भाग का ध्वजांक और शेष भाग को मुख्यांक अथवा संशोधित भाजक कहते हैं। ध्वजांक में केवल इकाई अथवा इकाई युक्त कई अंक हो सकते हैं।

(2) भाग संक्रिया की पूर्व विधियों के समान इस विधि में भी निर्धारित स्थान को तीन खण्डों में विभाजित करते हैं।

(क) प्रथम खण्ड में भाजक के दोनों भाग लेंगे। मुख्यांक नीचे अर्थात आधार स्थान पर तथा ध्वजांक उसके ऊपर अर्थात घातांक के स्थान पर लिखेंगे।

(ख) ध्वजांक में जितने अंक हो, भाज्य के उतने ही अंतिम अंक (इकाई से लेकर) तृतीय खण्ड में तथा उसके शेष अंक मध्य खण्ड में लिखेंगे।

(3) ध्वजांक विधि के लिए 529 ÷ 23 को निम्न रूप में लिखा जा सकता है।

	प्रथम खण्ड	मध्य खण्ड	तृतीय खण्ड	
ध्वजांक	3	5 2	9	
मुख्यांक	2			
		भागफल	शेषफल	क्षैतिज रेखा

विधिः— (1) मध्यखण्ड के लिए भाज्य के सबसे बाएँ अंक में मुख्यांक का भाग देने पर भाग का जो प्रथम अंक आता है उसे क्षैतिज रेखा के नीचे भागफल के निर्धारित स्थान पर लिखा जाता है।

(2) प्राप्त शेषफल को बाईं ओर से दूसरे अंक से पहले और नीचे लिखा जाता है जो नया भाज्य बन जाता है।

(3) नए भाज्य से निम्न सूत्र से संशोधित भाज्य प्राप्त होता है।
संशोधित भाज्य = नया भाज्य - भागफल अंक x ध्वजांक

(4) संशोधित भाज्य में मुख्यांक का फिर भाग देने से पिछली क्रियाओं की पुनरावृति होती है। भाग क्रिया संपूर्ण होने पर भागफल और शेषफल प्राप्त हो जाता है।

विधि को निम्न उदाहरणों से स्पष्ट किया जा रहा है।

उदाहरण 18 ध्वजांक विधि से 552 में 23 का भाग दीजिए।

हल

2	3	5 $_1$5	$_1$2
		2 4	0

संकेत

(i) मध्यखण्ड के 5 में 2 का भाग दिया।

(ii) भागफल का प्रथम अंक 2, क्षैतिज रेखा के नीचे लिखेंगे।

(iii) शेषफल = 1 लिखा मध्यखण्ड के 5 से पहले और नया भाज्य =15 प्राप्त हुआ।

(iv) संशोधित भाज्य = नया भाज्य - प्रथम भागफल x ध्वजांक
=15 - 2 x 3 = 9

(v) 9 में मुख्यांक 2 का भाग दिया। भागफल का दूसरा अंक 4, क्षैतिज रेखा के नीचे लिखेंगे।

(vi) शेषफल =1 तृतीय खण्ड के 2 से पहले और नया भाज्य = 12 प्राप्त हुआ।

(vii) संशोधित भाज्य = नया भाज्य - द्वितीय भागफल x ध्वजांक
=12 - 4 x 3 = 0

(viii) अतः भागफल =24, शेषफल =0

उदाहरण 19 4096 ÷ 64 (ध्वजांक विधि द्वारा)

हल

ध्वजांक 4	40 $_{4}9$	$_{1}6$	
मुख्यांक 6			
	6	4	

संकेत

(i) भाज्य = 40 में 6 का भाग दिया भागफल 6 शेषफल 4 है।

(ii) संशोधित भाज्य =49 - 6 x 4 = 25

(iii) 25 में मुख्यांक 6 का भाग दिया। भागफल का दूसरा अंक 4 क्षैतिज रेखा के नीचे लिखेंगे।

(iv) शेषफल 1 को तृतीय खण्ड के 6 से पहले और नया भाज्य = 16 प्राप्त हुआ।

(v) पुनः संशोधित भाज्य =16 - 4 x 4 = 0

(vi) अतः भागफल = 64, शेषफल = 0 ।

उदाहरण 20 ध्वजांक विधि द्वारा 87653 ÷ 53 हल कीजिए।

हल

ध्वजांक 3	8 $_{3}7$ $_{4}6$ $_{3}5$	$_{5}3$	
मुख्यांक 5			
योगफल	1 6 5 $\cancel{4}$ 3		53-3x3 = 44

संकेत

(i) मध्यखण्ड के 8 में 5 का भाग दिया

(ii) भागफल का प्रथम अंक 1, क्षैतिज रेखा के नीचे लिखा।

(iii) शेषफल 3 मध्यखण्ड के 7 से पहले और नीचे लिखिए

(iv) नया भाज्य = 37

(v) संशोधित भाज्य = 37 -1x3 = 34

(vi) 34 में मुख्यांक 5 का भाग दिया भागफल का दूसरा अंक 6 क्षैतिज रेखा के नीचे लिखेंगे।

(vii) शेषफल 4 मध्यखण्ड के 6 से पहले और नीचे लिखेंगे।

(viii) नया भाज्य = 46

(ix) संशोधित भाज्य = 46 - 6x3 = 28

(x) 28 में मुख्यांक 5 का भाग दिया भागफल का तीसरा अंक 5 क्षैतिज रेखा के नीचे लिखेंगे।।

(xi) शेषफल 3 जिसे मध्यखण्ड में 5 से पहले और उसके नीचे लिखा।

(xii) नया भाज्य = 35

(xiii) संशोधित भाज्य = 35 - 5 x 3 =20

(xiv) 20 में मुख्यांक 5 का भागफल 4 बार गया शेषफल 0 है।

(xv) संशोधित भाज्य = 3 - 3 x 4=-9 अतः ऋणात्मक संख्या में भागफल न देकर पूर्व में 4 के स्थान पर 3 बार भागफल दिया जावे।

(xvi) शेषफल 05 रहता है जिसे अंतिम खण्ड में 3 के नीचे एवं पहले लिखा गया शेषफल 0 है।

(xvii) शेषफल = 53 - 3 x 3 = 44

करो और सीखो

ध्वजांक विधि से भाग संक्रिया कीजिए–

(1) 1737 ÷ 21 (2) 37941 ÷ 47 (3) 23754 ÷ 74

(4) 3257 ÷ 74 (5) 7453 ÷ 79 (6) 59241 ÷ 82

प्रश्नावली 5

1. उर्ध्वतिर्यग्भ्याम् सूत्र का उपयोग कर गुणा कीजिए।
   (i) 101 x 105 (ii) 11 x 15 (iii) 18 x 81
   (iv) 121 x 129

2. निखिलम् सूत्र का उपयोग कर गुणा कीजिए।
   (i) 48 x 51 (ii) 27 x 29 (iii) 36 x 34
   (iv) 18 x 21 (v) 21 x 22 x 23 (vi) 31 x 28 x 27
   (vii) 96 x 97 x 95 (viii) 18 x 18 x 18 (ix) 99 x 99 x 99

3. ध्वजांक सूत्र का उपयोग कर भाग कीजिए।
   (i) 3987 ÷ 28 (ii) 5786 ÷ 78 (iii) 7396 ÷ 82

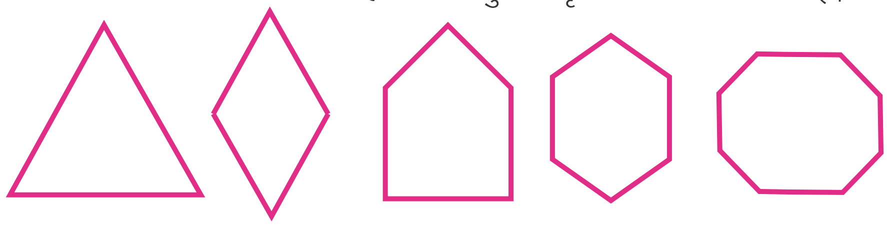
हमने सीखा

1. उर्ध्वतिर्यग्भ्याम् उर्ध्व एवं तिर्यक दो शब्दों से मिलकर बना है।, उर्ध्व का अर्थ ठीक ऊपर या नीचे लिखे अंक एवं तिर्यक का अर्थ तिरछा अर्थात तिरछे लिखे अंकों का गुणनफल है।
2. उर्ध्वतिर्यग्भ्याम् सूत्र से गुणा करते समय संख्याओं का समूहीकरण करते हैं। दो अंक का दो अंक से गुणा करते समय समूह तीन एवं तीन अंक का तीन अंक से गुणा करते समय समूह पांच बनते हैं।
3. सूत्र निखिलम् द्वारा घनफल ज्ञात करने का संक्षिप्त में इस प्रकार लिखा जा सकता है।
   जब संख्या x विचलन y व उपाधार अंक z हो, तो $z^2 (x + 2y) / 3y^2z / y^3$
4. उपाधार अंक ज्ञात करने के लिए उपाधार में आधार का भाग दिया जाता है।

अध्याय 6

बहुभुज

6.1 लीला ने स्केल व पेन्सिल की सहायता से कुछ आकृतियाँ कागज पर बनाई।



(i) (ii) (iii) (iv) (v)

आकृति 6.1

उसने कपिल से पूछा, क्या तुम इन आकृतियों को पहचान रहे हो ?

कपिल – पिछली कक्षा में हमने सीखा है कि भुजाओं की संख्या के आधार पर आकृतियों का नाम देते हैं। जैसेः– आकृति 6.1 में (i) में तीन भुजाओं से बनी आकृति त्रिभुज। (ii) में चार भुजा से बनी आकृति चतुर्भुज और आकृति (iii) पंचभुज हैं।

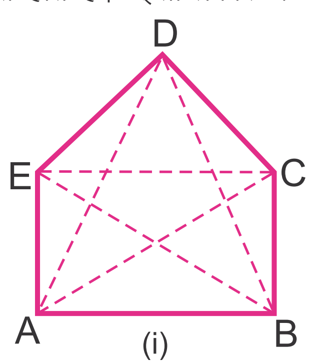
सुशीला – आकृति (iv) व (v) का क्या नाम है ?

कपिल – छः भुजा और आठ भुजा के कारण इन्हें क्रमशः षट्भुज और अष्टभुज कहते हैं।

ये सभी बन्द आकृतियाँ कई भुजाओं से मिलकर बनी है। "तीन या तीन से अधिक भुजाओं से बनी बंद आकृतियों को बहुभुज कहते हैं।"

6.2 बहुभुज के विकर्ण

किसी बहुभुज के विकर्ण उसके प्रत्येक शीर्ष को उसके आसन्न शीर्षों से अतिरिक्त शीर्षों को मिलाने पर बनते हैं। जैसे चित्र (i) में शीर्ष A को E व B के अलावा शीर्ष C व D से मिलाने पर क्रमशः विकर्ण AC व AD प्राप्त होते हैं। इसी प्रकार अन्य शीर्षों से भी दो–दो विकर्ण खींचे जा सकते हैं।

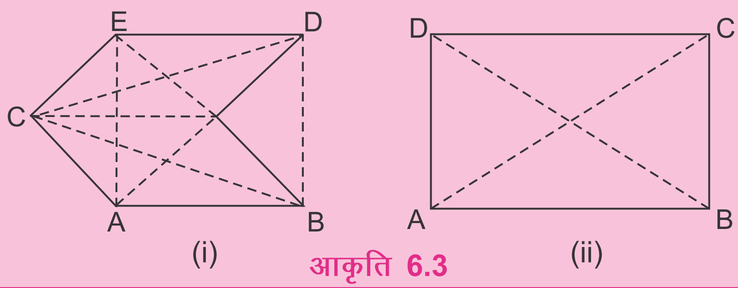


(i)

आकृति 6.2

करो और सीखो

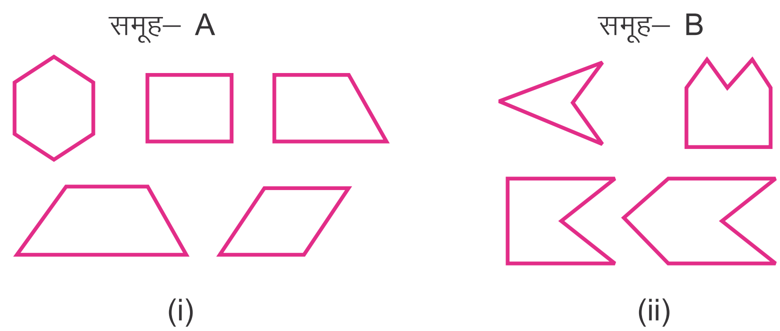
आकृति 6.3 में बनने वाले विकर्णों को देखिए एवं उनके नाम लिखिए।



आकृति 6.3

6.3 उत्तल और अवतल बहुभुज

नीचे दो समूहों में बहुभुज की आकृतियाँ दी गई हैं।



आकृति 6.4

दोनों समूहों के प्रत्येक बहुभुज के शीर्ष के A,B,C,D,E, --- आदि में नाम दीजिए। सभी बहुभुजों के प्रत्येक शीर्ष से विकर्ण खींचिए।

– क्या समूह A के सभी विकर्ण बहुभुज के अभ्यंतर में (अन्दर की तरफ) है ?

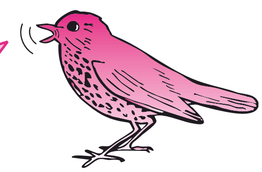
– क्या समूह B के सभी विकर्ण बहुभुज के अभ्यंतर में है ?

– क्या किसी समूह के बहुभुजों के विकर्ण बहुभुज के बाहर (बहिर्भाग) भी हैं ?

दोनों समूहों में बनी बहुभुज की आकृतियों में विकर्ण खींचने पर आप पाएँगे कि समूह A में बनी बहुभुज की आकृतियों में सभी विकर्ण बहुभुज के अभ्यंतर (अन्दर) हैं जबकि समूह B में बनी बहुभुज की आकृतियों में सभी विकर्ण अभ्यन्तर में नहीं हैं।

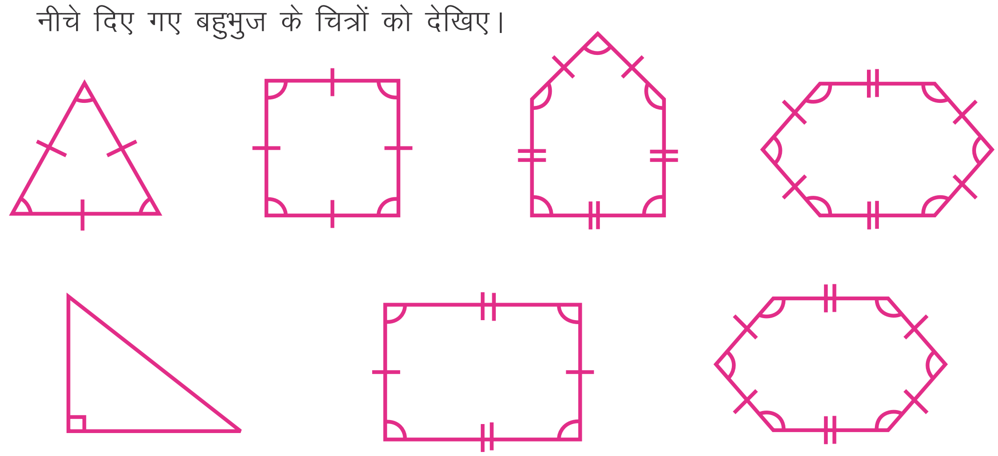
अतः जो बहुभुज उत्तल होते हैं उनके विकर्ण बहिर्भाग में नहीं होते हैं अर्थात अभ्यन्तर में स्थित होते हैं, लेकिन वे बहुभुज अवतल होते हैं, जिनके विकर्ण अभ्यन्तर व बहिर्भाग दोनों में होते हैं।

उत्तल बहुभुज का प्रत्येक कोण 180^0 से छोटा होता है जबकि अवतल बहुभुज का कम से कम एक कोण 180^0 से बड़ा है।



6.4 सम और विषम बहुभुज

नीचे दिए गए बहुभुज के चित्रों को देखिए।



आकृति 6.5

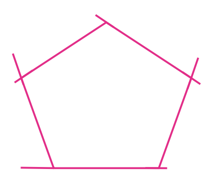
प्रत्येक चित्र के बराबर भुजा के लिए , चिह्नों का तथा बराबर कोणों के लिए चिह्नों का प्रयोग किया गया है। एक समकोणिक बहुभुज के सभी कोण आपस में बराबर होते हैं तथा समबहुभुज की सभी भुजाएँ आपस में बराबर होती हैं।

ऊपर दिए गए चित्रों में कौन–कौन से बहुभुज समकोणिक समबहुभुज हैं लिखिए क्या सभी समबहुभुज हैं ? क्या सभी समबहुभुज समकोणिक भी हैं ?

आप पाएँगे कि प्रत्येक समबहुभुज के सभी कोण बराबर होते हैं परन्तु ऐसा आवश्यक नहीं है कि समकोणिक बहुभुज समबहुभुज भी हो उदाहरणतः आयत के सभी कोण बराबर होते हैं परन्तु सभी भुजाएँ समान नहीं होती हैं।

बहुभुज के अन्तः कोणों का योग– सभी छात्र अपनी–अपनी कॉपी में कोई एक बहुभुज बनाएँ उसके अभ्यन्तर कोई एक बिन्दु लें।

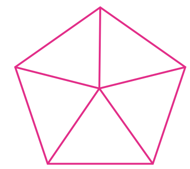
1. अभ्यन्तर में स्थित बिन्दु को बहुभुज के सभी शीर्षों से मिलाएँ। कितने त्रिभुज बने ? चर्चा करें। आप किस निष्कर्ष पर पहुँचे हैं ?



आकृति 6.6

2. उदाहरण के लिए एक पंचभुज लिया गया है। जिसमें 5 कोण हैं।

3. अतः चित्र में 5 त्रिभुज बने हैं।



आकृति **6.7**

4. n भुजाओं वाले बहुभुज में n कोण होंगे।

5. n शीर्षों को केंद्र से मिलाने पर n त्रिभुज बनेंगे।

इस प्रकार बनने वाले सभी त्रिभुजों के कोणों का योग = त्रिभुजों की संख्या x 180^0
(क्योंकि एक त्रिभुज के सभी अंत कोणों का योग 180^0 होगा।)

अतः पंचभुज के बने सभी त्रिभुजों के कोणों का योग = 5 x 180^0

इस प्रकार षट्भुज के लिए = 6 x 180^0

अतः n भुजाओं वाले बहुभुज में बने सभी त्रिभुजों के कोणों का योग = n x 180^0

हम जानते हैं कि केंद्र पर बने सभी कोणों का योग = 360^0 ।

1. अतः पंचभुज के अंतः कोणों का योग
= 5 x 180^0 - 360^0
= 5 x 180^0 - 2 x 180^0
= 180^0 (5 - 2)

2. षटभुज के अंतः कोणों का योग = 6 x 180^0 - 360^0
= 6 x 180^0 - 2 x 180^0
= 180^0 (6 - 2)

इसी प्रकार n भुजाओं वाले बहुभुज के अतः कोणों का योग = n x 180^0 - 360^0
= n x 180^0 - 2 x 180^0
= (n - 2) 180^0
= 180^0 (बहुभुज की भुजाओं की संख्या - 2)
= 180^0 (n - 2)

अतः बहुभुज की भुजाओं की संख्या में से 2 घटाकर 180^0 से गुणा करने पर बहुभुज के सभी अन्तः कोणों का योग प्राप्त होता हैं।

जैसे n = 7 तो अंतः कोणों का योग = (7 - 2) 180^0
= 5 x 180^0 = 900^0

n = 4 तो अंतः कोणों का योग = (4 - 2) 180^0 = 2 x 180^0 = 360^0

इस प्रकार यदि समबहुभुज में एक अन्तः कोण का मान ज्ञात करना है, तो सभी अन्तः कोणों के योग में भुजाओं की संख्या n का भाग देना होता है।

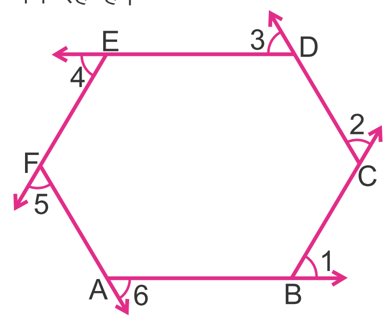
अतः n भुजा वाले समबहुभुज का प्रत्येक अन्तःकोण = $\frac{(n-2)\ 180^\circ}{n}$

6.5 एक बहुभुज के बाह्य कोणों की मापों का योग

बहुभुज के बहिष्कोण

एक बहुभुज की भुजाओं को एक ही क्रम (वामावर्त या दक्षिणावर्त) में बढ़ाने पर बहुभुज के बाहर की ओर बने कोण (जो कि अन्तः कोणों के संपूरक कोण है) बहुभुज के बहिष्कोण कहलाते हैं।

आकृति 6.8 में इस प्रकार बहिष्कोण $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4, \angle 5$ तथा $\angle 6$ बन रहे हैं। चित्र में प्रत्येक शीर्ष पर बहिष्कोण व अन्तः कोण का योग एक रैखिक कोण युग्म है।



आकृति 6.8

अतः शीर्ष पर बने कोणों का योग = भुजाओं की संख्या x 180^0

$= n \times 180^0$ --- (i)

बहुभुज के अन्तः कोण का योग $= (n - 2) \times 180^0$ --- (ii)

बहिष्कोण का योग = (i) - (ii)

$= n \times 180^0 - (n-2) \times 180^0$

$= 180^0 \times \{n - (n - 2)\}$

$= 180^0 \times \{n - n + 2\}$

$= 180^0 \times 2$

अतः किसी उत्तल बहुभुज के सभी बहिष्कोणों का योग $= 360^0$ होता हैं।

एक सम बहुभुज में यदि n भुजाएँ हो, तो प्रत्येक बहिष्कोण का मान $= \frac{360^0}{n}$ होगा।

उदाहरण 1 सम पंचभुज के प्रत्येक बहिष्कोण का मान बताइए।

हल बहुभुज के सभी बहिष्कोणों का मान $= 360^0$

बहुभुज के भुजाओं की संख्या $= 5$

एक बहिष्कोण का मान $= \frac{360^0}{5}$

$= 72^0$

उदाहरण 2 एक समबहुभुज के प्रत्येक बहिष्कोण का मान $=60^0$ तो भुजाओं की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल बहिष्कोणों का मान = भुजाओं की संख्या x एक बहिष्कोणों का मान

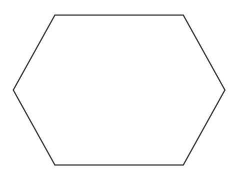
$360^0 = n \times 60^0$

$n = \frac{360}{60}$

n = 6 भुजाएँ

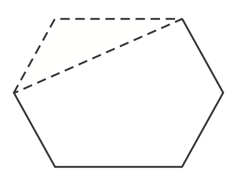
गतिविधि

कागज पर कोई बहुभुज बनाइए।
(सामने चित्र में षट्भुज दिखाया गया है)



(i)

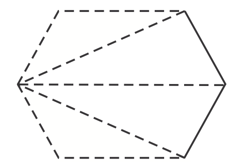
सम्मुख शीर्ष को मिलाकर कैंची से काटें और त्रिभुज निकालें।



(ii)

इसी प्रकार और भी त्रिभुज निकालें ।

बनने वाले त्रिभुजों की संख्या कितनी हैं ?
सोचो और आपस में चर्चा करो। क्या बहुभुज की भुजाओं की संख्या एवं त्रिभुजों की संख्या में कोई सम्बन्ध हैं ?



आकृति 6.9

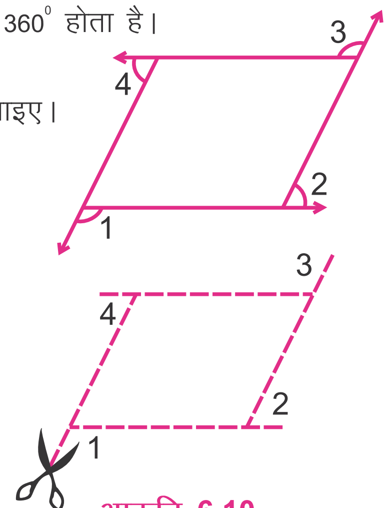
क्या त्रिभुजों की संख्या, भुजाओं की संख्या से दो कम हैं।
अतः छः भुजाओं से बनने वाले बहुभुज में त्रिभुजों की संख्या = 4
एक त्रिभुज के अन्तःकोणों का योग $=180^0$ है।
अन्तः कोणों का योग $= 4 \times 180^0$ होगा।

गतिविधि

बहुभुज के बाह्य कोणों की मापों का योग 4 समकोण अर्थात 360^0 होता है।

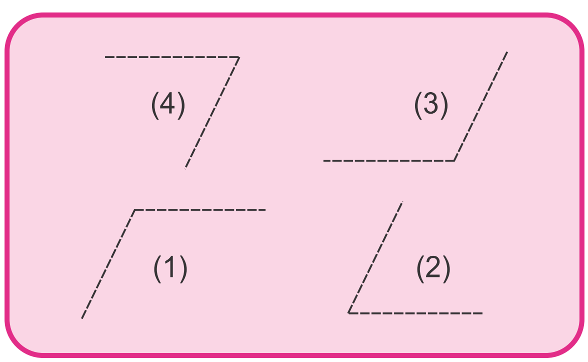
(i) एक कागज पर एक बहुभुज बनाकर उसके बहिष्कोण बनाइए।

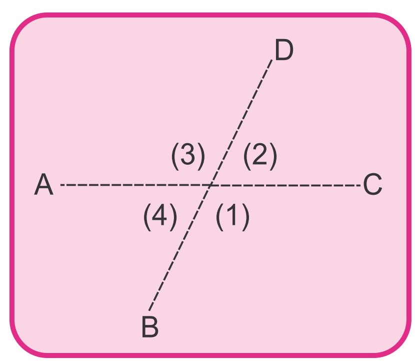
(ii) अब कैंची की सहायता से बहिष्कोणों को अलग कीजिए।



आकृति 6.10

काटे गए सभी भागों को मिलाइए।

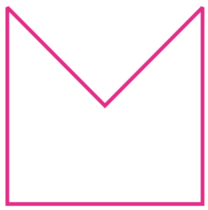


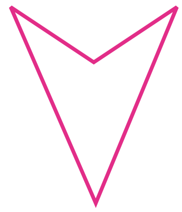


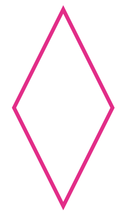
चित्र में– भाग(1) से चलकर पुनः वहीं पहुँचने पर 1 चक्कर (घूर्णन) पूरा होता है; अतः
$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 360^0$

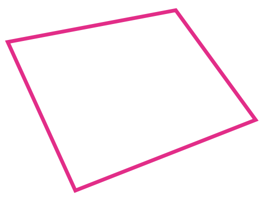
प्रश्नावली 6.1

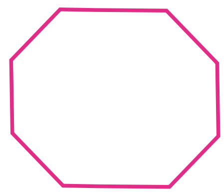
1. नीचे दर्शाई गई आकृतियों में पेन्सिल से विकर्ण बनाइए और बताइए।

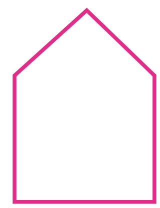
(i)


(ii)


(iii)


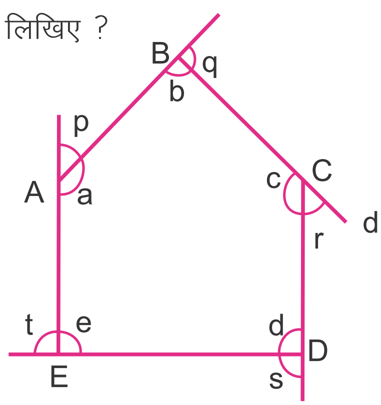
(iv)


(v)


(vi)


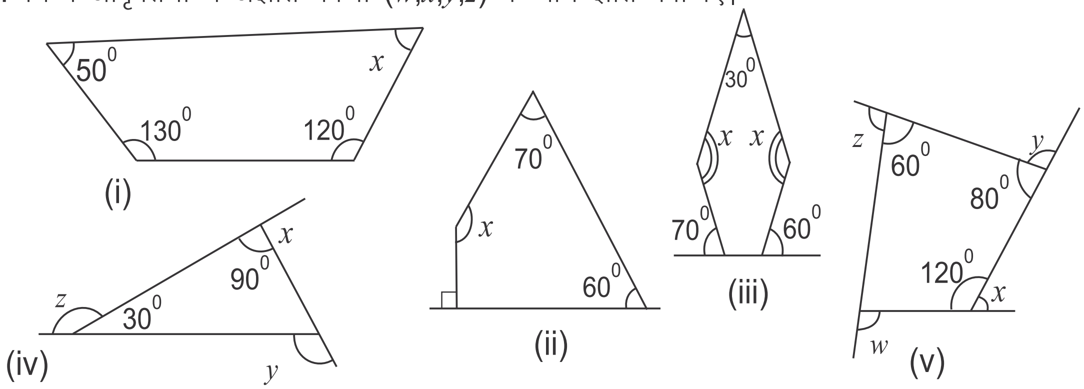
(i) किन आकृतियों में विकर्ण अन्दर बनेंगे ?
(ii) किन आकृतियों में विकर्ण बाहर बनेंगे ?
(iii) उपर्युक्त बहुभुजों के प्रकार बताइए (उत्तल अथवा अवतल) ?

2. दिए गए बहुभुज ABCDE में
(i) आन्तरिक कोणों के नाम लिखिए ?
(ii) बाह्य कोणों के नाम लिखिए ?



3. सम बहुभुज किसे कहते हैं ? उन समबहुभुजों के नाम बताइए जिसमें
(i) 5 भुजाएँ
(ii) 6 भुजाएँ
(iii) 8 भुजाएँ हों।

4. निम्न आकृतियों में अज्ञात कोणों (w, x, y, z) के मान ज्ञात कीजिए।

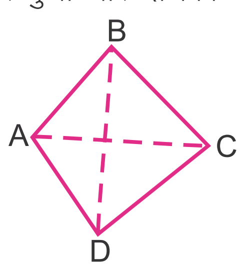


5. एक समबहुभुज की भुजाओं की संख्या ज्ञात कीजिए जिसके प्रत्येक बाह्य कोण का माप 45^0 है।
6. एक समबहुभुज की भुजाओं की संख्या ज्ञात कीजिए यदि इसका प्रत्येक अंतःकोण 165^0 हो।
7. उस समबहुभुज की भुजाओं की संख्या ज्ञात कीजिए जिसका प्रत्येक बाह्य कोण 24^0 है।
8. उस समबहुभुज के प्रत्येक अंतः कोण का मान ज्ञात कीजिए जिसकी 10 भुजाएँ हो।
9. किसी बहुभुज का प्रत्येक अंतः कोण 115^0 का हो तो क्या वह समबहुभुज होगा?
10. एक षट्कोण का एक अंतः कोण 165^0 है और शेष प्रत्येक अंतः कोण का माप x^0 है तो शेष सभी कोणों की माप बताइए।
11. एक त्रिभुज की भुजाओं को एक ही क्रम में बढ़ाने से प्राप्त बहिष्कोण क्रमशः 110^0, 115^0 व x^0 का हो तो x का मान ज्ञात कीजिए।
12. एक समसप्तभुज के सभी अंतः कोणों का योगफल ज्ञात कीजिए।

6.6 चतुर्भुजों के गुण

आप जानते हैं कि चार सरल रेखाओं से घिरी बंद आकृति को चतुर्भुज कहते हैं। किसी भी चतुर्भुज में चार कोण, चार शीर्ष, चार भुजा और दो विकर्ण होते हैं।

चतुर्भुज ABCD में



आकृति 6.11

शीर्ष – A, B, C व D हैं।
भुजाएँ– AB, BC, CD, DA
कोण– $\angle ABC, \angle BCD, \angle CDA$ और $\angle DAB$
विकर्ण– AC तथा BD हैं।

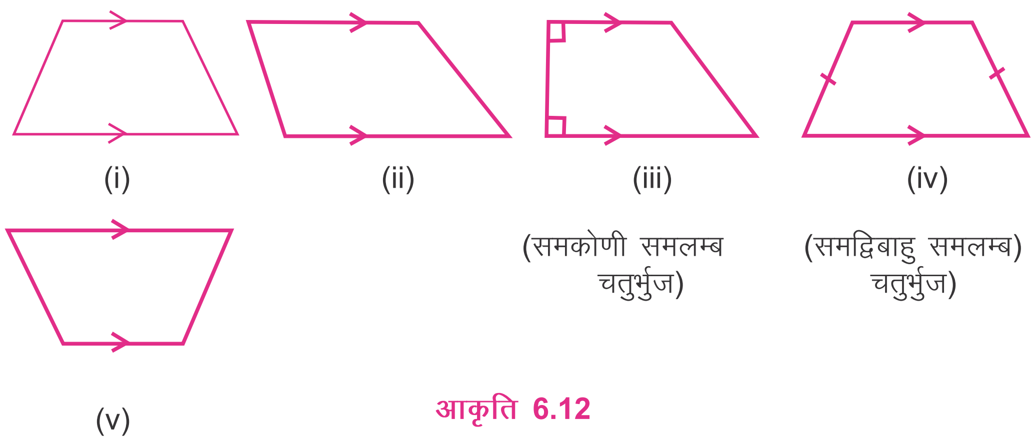
6.7 विभिन्न प्रकार के चतुर्भुज

हमने त्रिभुज को उनकी भुजाओं के आधार पर विशेष नाम यथा समबाहु त्रिभुज, समद्विबाहु त्रिभुज, और विषमबाहु त्रिभुज, कोणों के आधार पर न्यून कोण त्रिभुज, समकोण त्रिभुज व अधिक कोण त्रिभुज में बाँटा था।

कुछ चतुर्भुजों के आकार उनकी भुजाओं एवं कोणों की प्रकृति के कारण विशिष्ट बन जाते हैं। ऐसे चतुर्भुजों को वर्ग, आयत, समान्तर चतुर्भुज, समलम्ब चतुर्भुज, पतंग आदि विशिष्ट नामों से जानते हैं।

6.7.1 समलम्ब चतुर्भुज

वह चतुर्भुज जिसमें सम्मुख भुजाओं का एक जोड़ा समान्तर हो समलम्ब चतुर्भुज कहलाता है।



आकृति 6.12

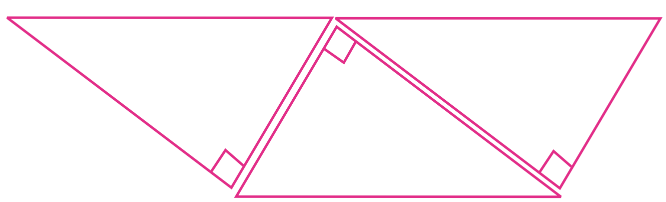
(तीर के निशान समान्तर भुजाओं को व्यक्त करते हैं।)

उपर्युक्त चित्र समलम्ब चतुर्भुज के हैं, (iii), (iv) विशेष प्रकार के समलम्ब चतुर्भुज हैं।

- जिन समलम्ब चतुर्भुजों में दो कोण समकोण हों उन्हें समकोणीय समलम्ब चतुर्भुज कहते हैं। जैसे कि चित्र (iii) में दर्शाया गया है।

- जिन समलम्ब चतुर्भुजों में दो असमान्तर भुजाएँ बराबर हो, वे समद्विबाहु समलम्ब चतुर्भुज कहलाते हैं। जैसा कि चित्र (iv) में दर्शाया गया है।

गतिविधि आप अपने मित्रों के ज्यामिति बॉक्स से सेट स्क्वायर लीजिए जिनके समकोण वाले सिरे इस प्रकार जमा कर देखिए।



आकृति 6.13

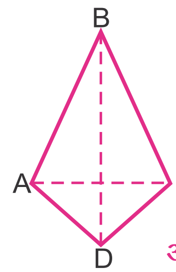
प्राप्त आकृति समलम्ब चतुर्भुज है।

अब आप सेट स्क्वायर के उपयोग से अलग–अलग समलम्ब चतुर्भुज की आकृतियाँ प्राप्त कीजिए।

6.7.2 पतंग

ऐसे चतुर्भुज जिसमें आसन्न भुजाओं के जोड़े समान लम्बाई के हों। ऐसी आकृतियों को पतंग कहते हैं। जैसे कि चित्र में AB और BC आसन्न भुजाएँ हैं एवं CD और DA क्रमशः समान आसन्न भुजाएँ हैं।

अतः AB = BC और AD = CD



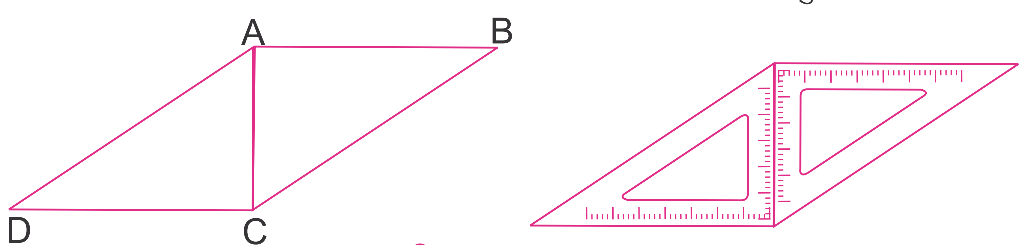
आकृति 6.14

6.7.3. समान्तर चतुर्भुज

ऐसे चतुर्भुज जिनकी आमने सामने की भुजाएँ बराबर हो और समान्तर हों उन्हें समान्तर चतुर्भुज कहते हैं। समान्तर चतुर्भुज की विशेषताएँ निम्न हैं–

1. सम्मुख भुजाओं का प्रत्येक युग्म बराबर होता है।
2. सम्मुख कोणों का प्रत्येक युग्म बराबर होता है।
3. विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं।

गतिविधि आप अपने मित्रों के साथ बैठकर अपने व उनकी ज्यामिति बॉक्स से सेट–स्क्वायर निकालिए और एक जैसे दो सेट–स्क्वायर लीजिए और उन्हें चित्रानुसार जमाइए।

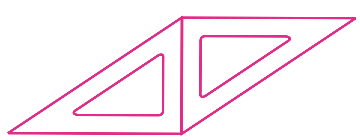


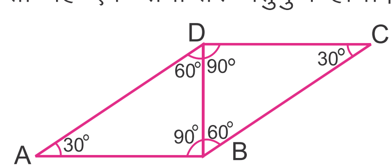
आकृति 6.15

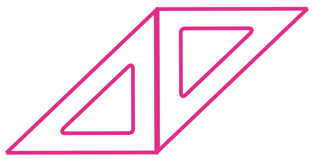
चित्र में AB II DC, AD II BC और AB= DC व AD = BC है।

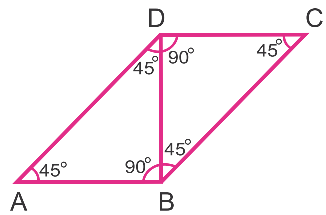
अतः 1. किसी समान्तर चतुर्भुज में सम्मुख भुजाएँ बराबर व समान्तर होती हैं।
2. सम्मुख कोणों का प्रत्येक युग्म बराबर होता है।

सेट–स्क्वायर के सेट लो, उन्हें चित्रानुसार इस प्रकार जमाओ और पता करो क्या सम्मुख कोण का युग्म बराबर है या नहीं। यदि बराबर होगा तो वह एक समान्तर चतुर्भुज होगा।





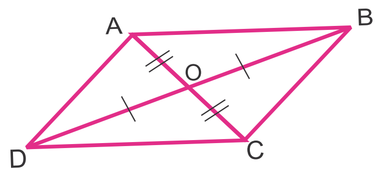




आकृति 6.16

चित्र देखने पर स्पष्ट है कि सम्मुख कोणों के युग्म आपस में बराबर हैं जैसे $30^0 - 60^0 - 90^0$ वाले सेट स्क्वायर के जोड़ों में सम्मुख जोड़े $30^0 - 30^0$ व $150^0 - 150^0$ के हैं।

3. विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं। समान्तर चतुर्भुज ABCD बनाएँ एवं AO, OB, OC व OD को नापे आप किस नतीजे पर पहुँचते हैं। क्या OA=OC व OB=OD हैं ?

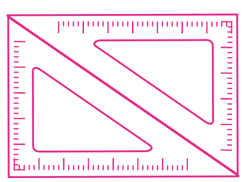


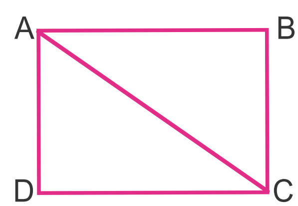
आकृति 6.17

स्पष्ट है कि AC व BD विकर्ण परस्पर एक दूसरे को बिन्दु O पर समद्विभाजित करते हैं। OA = OC व OB = OD हैं।

6.7.4 समान्तर चतुर्भुज की विशिष्ट स्थितियाँ

(i) आयत ऐसे समान्तर चतुर्भुज जिनका प्रत्येक कोण समकोण होता है आयत कहलाता है।





आकृति 6.18

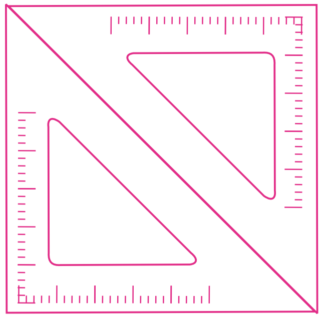
आप $30° - 60° - 90°$ वाले दो सेट स्क्वायर को चित्रानुसार इस प्रकार जमाइए और देखिए सम्मुख कोण समकोण है। $\angle A = \angle C = \angle B = \angle D$ समकोण हैं एवं AC व BD का नाप क्या AC = BD हैं ?

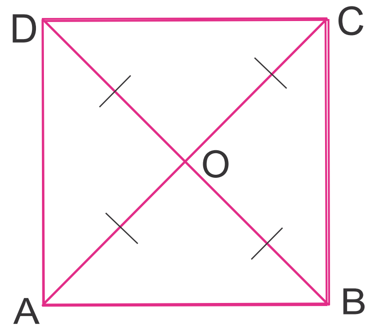
आयत की विशेषताएँ

1. आमने सामने की भुजाएँ बराबर होती है।
2. प्रत्येक कोण समकोण होता है।
3. विकर्ण समान होते हैं व एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

(ii) वर्ग ऐसा आयत जिसकी चारों भुजाएँ समान हो, वर्ग कहलाता हैं। आप $45° - 90° - 45°$ वाले दो सेट स्क्वायर लीजिए। उन्हें चित्रानुसार जमाइए और देखिए कि प्रत्येक कोण समकोण है।

$\angle A = \angle C = \angle B = \angle D = 90^\circ$ हैं व विकर्ण बराबर व एक दूसरे के लम्बवत है।





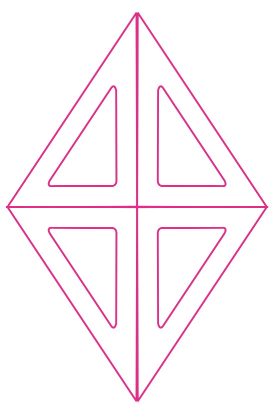
आकृति 6.19

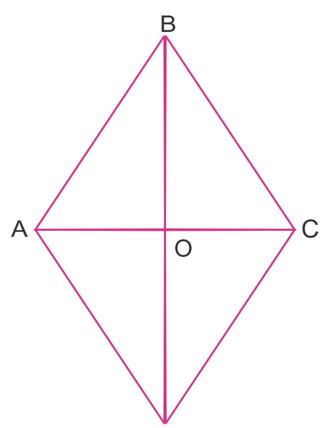
वर्ग की विशेषताएँ

1. प्रत्येक भुजा समान है।
2. विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं।
3. विकर्ण परस्पर लम्बवत हैं।

6.7.5 समचतुर्भुज

ऐसे समान्तर चतुर्भुज जिनकी चारों भुजाएँ समान हो एवं विकर्ण परस्पर लम्बवत् समद्विभाजित करते हैं। आप $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ वाले चार सेट स्क्वायर लीजिए। उन्हें चित्रानुसार इस प्रकार जमाइए और देखिए कि विकर्ण एक दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं और चारों की भुजाएँ समान हैं।





आकृति 6.20

चित्र में AC तथा BD एक दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं, OA = OC व OB = OD ।

करो और सीखो

चतुर्भुज के गुण के आधार पर दिए गए स्थान पर ✓ या ✗ चिह्न लगाइए।

	समान्तर चतुर्भुज	आयत	समचतुर्भुज	वर्ग	समलंब जिनकी असमांतर भुजाएँ बराबर हो	समलम्ब चतुर्भुज	पतंग
आमने सामने की भुजाएँ समांतर है	✓	✓	✓	✓	✗	✗	✗
आमने सामने की भुजाएँ बराबर है							
सम्मुख कोण बराबर है							
विकर्ण सर्वांगसम त्रिभुज बनाते हैं							
विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।							
विकर्ण एक दूसरे पर लम्ब हैं							
विकर्ण बराबर हैं							
सभी कोण समकोण हैं							
सभी भुजाएँ बराबर हैं							

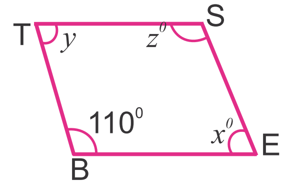
प्रश्नावली 6.2

1. उपयुक्त विकल्प चुनकर रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए।
   (i) समान्तर चतुर्भुज के आसन्न कोण ——————————होते हैं। (बराबर/सम्पूरक)
   (ii) आयत के विकर्ण ——————————होते हैं। (बराबर/लम्ब समद्विभाजित)
   (iii) किसी समलम्ब चतुर्भुज में AB II CD, यदि A = 100^0 हो तो D का मान ————————होगा। (100^0/80^0)
   (iv) यदि किसी चतुर्भुज में विकर्ण एक दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित कर रहे हैं

तो वह ————————————कहलाता है। (समान्तर चतुर्भुज/समचतुर्भुज)

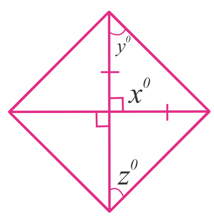
(v) सभी वर्ग ————————————होते हैं।(सर्वांगसम/समरूप)

2. आकृति में BEST एक समान्तर चतुर्भुज है x,y,z के मान ज्ञात कीजिए।

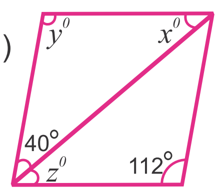


3. निम्न समान्तर चतुर्भुजों में अज्ञात x,y,z के मान ज्ञात कीजिए।

(i)



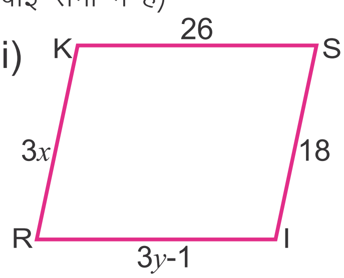
(ii)



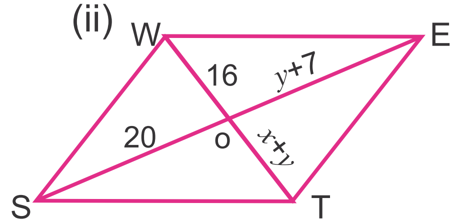
4. किसी समान्तर चतुर्भुज के दो आसन्न कोणों का अनुपात 1 : 5 हैं। समान्तर चतुर्भुज के सभी कोणों का मान ज्ञात कीजिए।

5. निम्न आकृतियाँ RISK और STEW समान्तर चतुर्भुज हैं। x तथा y के मान ज्ञात कीजिए (लम्बाई सेमी में है)

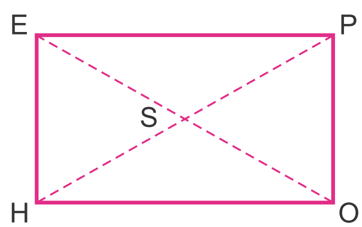
(i)



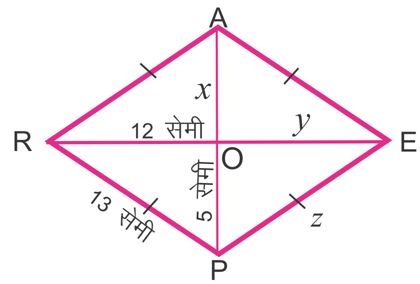
(ii)



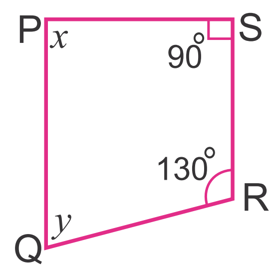
6. HOPE एक आयत है इसके विकर्ण एक दूसरे को S पर प्रतिच्छेद करते हैं। x का मान ज्ञात कीजिए यदि SH = $2x + 4$ और SE = $3x + 1$ है।



7. PEAR एक समचतुर्भुज है x, y व z का मान ज्ञात कीजिए और कारण भी लिखिए।



8. समलम्ब चतुर्भुज PQRS में PQ II SR, $\angle x$ और $\angle y$ के मान ज्ञात कीजिए।



हमने सीखा

1. तीन या तीन से अधिक सरल रेखाओं से बनी बंद आकृति बहुभुज कहलाती है।
2. किसी भी त्रिभुज में विकर्णों की संख्या भुजाओं की संख्या से दो कम होती है। बहुभुज के अंतः कोणों का योग $(n - 2)180^\circ$ होता है।
3. वे बहुभुज जिनके सभी विकर्ण अभ्यन्तर में होते हैं उत्तल बहुभुज कहते हैं।
4. वे बहुभुज जिनमें कम से कम एक विकर्ण बहिर्भाग में हो, अवतल बहुभुज कहलाते हैं।
5. वह बहुभुज जिसकी सभी भुजाएँ समान माप की हो उसे समबहुभुज कहते हैं।
6. बहुभुज के सभी बहिष्कोणों का योग 360° होता है
7. चार सरल रेखाओं से बनी बंद आकृति चतुर्भुज कहलाती है। किसी भी चतुर्भुज में चार कोण, चार शीर्ष, चार भुजा और दो विकर्ण होते हैं।
8. वह चतुर्भुज जिसमें सम्मुख भुजाओं का एक जोड़ा समान्तर हो समलम्ब चतुर्भुज कहलाता है।
9 ऐसे चतुर्भुज जिसमें आसन्न भुजाओं के जोड़े समान माप के हो पतंग कहते हैं।

अध्याय 7

चतुर्भुज की रचना

7.1 पिछली कक्षा में हमने त्रिभुजों की रचना करना सीखा है। इस अध्याय में हम चतुर्भुज की रचना के बारे में चर्चा करेंगे। त्रिभुज की रचना में उसके 6 अवयवों में से तीन अवयव (SSS, SAS, ASA) दिए होने पर उसकी रचना संभव है।

चतुर्भुज में चार भुजाएँ, चार कोण एवं दो विकर्ण कुल 10 अवयव हैं। इसके अतिरिक्त चतुर्भुजों के विशिष्ट गुण भी होते है। जिन्हें हमने अध्याय 6 में पढ़ा है।

एक अद्वितीय चतुर्भुज की रचना के लिए हम निम्न स्थितियों पर विचार करेंगे।

7.1.1 जब चार भुजाएँ और एक विकर्ण दिया हुआ है।

7.1.2 जब दो विकर्ण और तीन भुजाएँ दी हुई हैं।

7.1.3 चार भुजाएँ एवं एक कोण दिया हुआ हो।

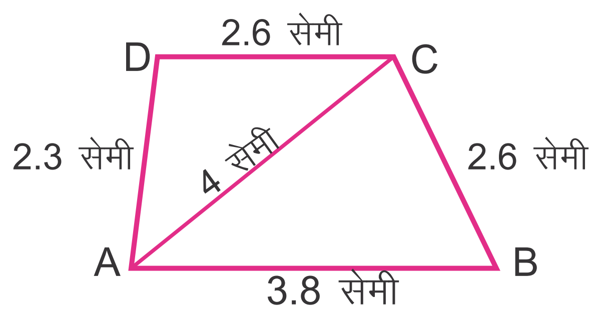
7.1.4 जब तीन भुजाएँ और उनके बीच के दो कोण दिए हुए हैं।

7.1.5 जब दो आसन्न भुजाएँ और तीन कोण दिए हुए हैं।

7.1.1 चतुर्भुज की चारों भुजाओं के अतिरिक्त एक विकर्ण ज्ञात होने पर चतुर्भुज की रचना करना

उदाहरण 1 चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसमें AB=3.8 सेमी, BC=2.6 सेमी, CD=2.6 सेमी, AD=2.3 सेमी और विकर्ण AC=4.0 सेमी है।

हल सर्वप्रथम ABCD का कच्चा चित्र बनाइए। इसमें विकर्ण AC खींचिए। चतुर्भुज की सभी मापों को कच्चे चित्र में अंकित कीजिए।

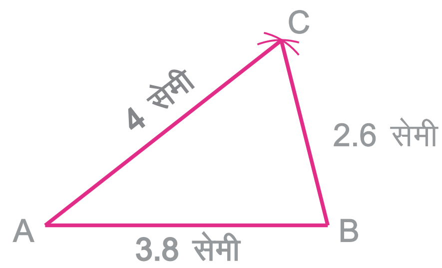


कच्चे चित्र को देखने से स्पष्ट है कि यह चतुर्भुज $\triangle$ADC और $\triangle$ABC से मिलकर बना है।

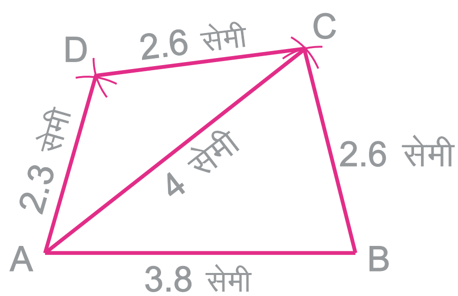
रचना

चरण 1 सर्वप्रथम AB=3.8 सेमी का रेखा खण्ड खींचिए।

चरण 2 B से 2.6 सेमी का चाप और बिन्दु A से 4 सेमी का चाप लगाइए। दोनों चापों के कटान बिन्दु का नाम C लिखिए। भुजा AC व BC खींचिए।



चरण 3 बिन्दु A से 2.3 सेमी का चाप और बिन्दु C से 2.6 सेमी का चाप लगाइए और कटान बिन्दु का नाम D लिखिए, भुजा AD व CD खींचिए। इस प्रकार बना चतुर्भुज ABCD अभीष्ट चतुर्भुज है।



प्रश्नावली 7.1

1. एक चतुर्भुज ABCD बनाइए जबकि AB = 4.0 सेमी, BC = 6.0 सेमी, CD = DA = 5.2 सेमी और AC = 8.0 सेमी है।

2. एक चतुर्भुज JUMP बनाइए जबकि JU = 3.5 सेमी, UM = 4.0 सेमी, MP = 5.0 सेमी, PJ = 4.5 सेमी और PU = 6.5 सेमी है।

3. समान्तर चतुर्भुज MORE कि रचना कीजिए, जिसमें MO = 3.6 सेमी, OR = 4.2 सेमी, MR = 6.5 सेमी है। शेष भुजाओं को नाप कर उनकी माप उत्तर पुस्तिका में लिखिए।

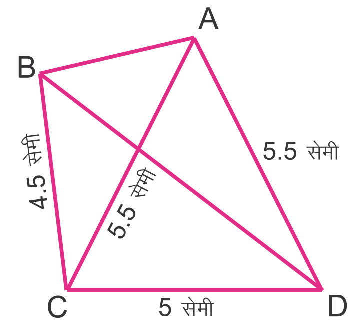
4. एक सम चतुर्भुज BEST की रचना कीजिए जिसमें BE = 4.5 सेमी और ET = 6.0 सेमी है। तो विकर्ण BS को माप कर लिखिए।

5. एक चतुर्भुज PQRS की रचना कीजिए जिसमें PQ = 4.4 सेमी, QR = 4.0 सेमी, RS = 6.4 सेमी, SP = 2.8 सेमी और QS = 6.6 सेमी है। विकर्ण PR की लम्बाई नाप कर लिखिए।

7.1.2 चतुर्भुज की रचना, जबकि तीन भुजाएँ और दो विकर्ण ज्ञात हो

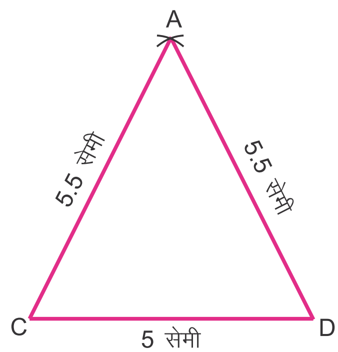
उदाहरण 2 एक चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए, जिसमें BC = 4.5 सेमी, AD = 5.5 सेमी, CD = 5.0 सेमी, विकर्ण AC = 5.5 सेमी और विकर्ण BD = 7.0 सेमी है।

हल सर्वप्रथम ABCD का कच्चा चित्र बनाइए। चतुर्भुज के सभी मापों को कच्चे चित्र में अंकित कीजिए। इसमें दो त्रिभुज ADC और त्रिभुज BDC की रचना करके बिन्दु A और B को मिला देने पर चतुर्भुज ABCD की रचना की जा सकती है।



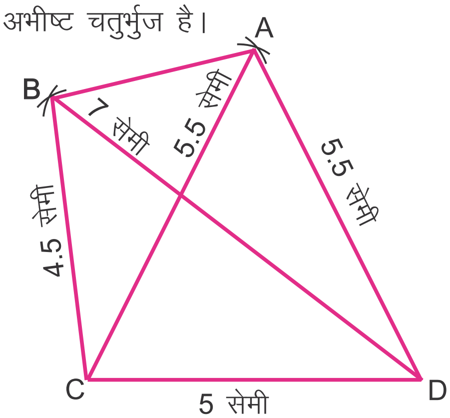
चरण 1 सर्वप्रथम CD=5.0 सेमी लम्बाई का रेखा खण्ड खींचिए।

चरण 2 बिन्दु C से AC = 5.5 सेमी व बिन्दु D से AD = 5.5 सेमी का चाप काट दें। कटान बिन्दु को A से प्रदर्शित कीजिए, AC व AD को मिलाइए।



चरण 3 बिन्दु C से BC = 4.5 सेमी और D से BD = 7.0 सेमी का चाप काट दें। कटान बिन्दु को B से प्रदर्शित कीजिए, BC व BD को मिलाइए।

चरण 4 AB को मिलाइए, ABCD अभीष्ट चतुर्भुज है।



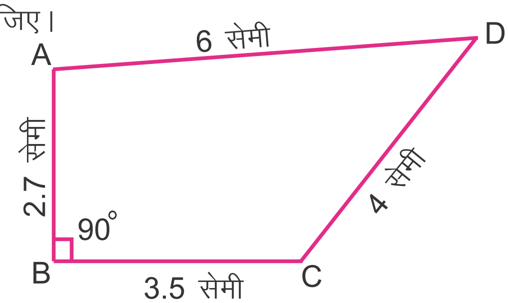
प्रश्नावली 7.2

1. चतुर्भुज LIFT की रचना कीजिए जबकि LI = 4.0 सेमी, IF = 3.0 सेमी, TL = 2.5 सेमी LF = 4.5 सेमी और IT = 4.0 सेमी है।
2. चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जबकि AB = 3.8 सेमी, BC = 3.0 सेमी, AD = 2.3 सेमी, AC = 4.5 सेमी और BD = 3.8 सेमी है। भुजा CD की माप नापकर लिखिए।
3. चतुर्भुज PQRS की रचना कीजिए जबकि PS = 6.0 सेमी, SR = 5.0 सेमी, RQ = 7.5 सेमी, PR = 6.0 सेमी और SQ = 10.0 सेमी है।
4. चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसमें AB= BC= CD = 5.0 सेमी विकर्ण AC = 6.7 सेमी तथा BD = 5.9 सेमी।
5. चतुर्भुज GOLD की रचना कीजिए जिसमें GO = 3.0 सेमी, OL = 2.5 सेमी, GD = 5.0 सेमी, GL = 4 सेमी व OD = 7 सेमी है।

7.1.3 चतुर्भुज की रचना, जबकि चार भुजाएँ और एक कोण दिया हो

उदाहरण 3 चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए, जिसमें AB = 2.7 सेमी, BC = 3.5 सेमी, CD = 4.0 सेमी, AD = 6.0 सेमी और कोण $\angle B = 90^\circ$ है।

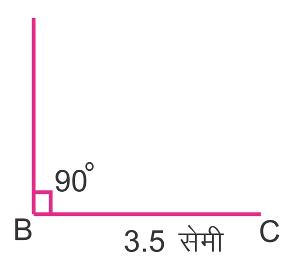
हल कच्चा चित्र बनाकर मापों को अंकित कीजिए।



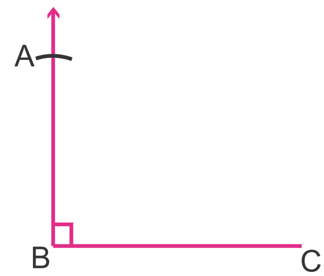
रचना

चरण 1 सर्वप्रथम BC=3.5 सेमी लम्बाई का एक रेखा खण्ड खींचिए।

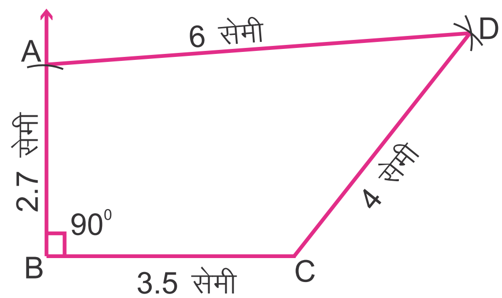
चरण 2 B पर चाँदे की सहायता से 90° का कोण खींचिए।



चरण 3 B से AB = 2.7 सेमी का चाप काटिए, इस प्रकार बिन्दु A प्राप्त हुआ।



चरण 4 बिन्दु A से 6 सेमी का चाप काटिए व बिन्दु C से 4 सेमी का चाप काटिए। दोनों चाप जहाँ मिलेंगे वह बिन्दु D होगा, AD व CD को मिलाइए। चतुर्भुज ABCD अभीष्ट चतुर्भुज है।



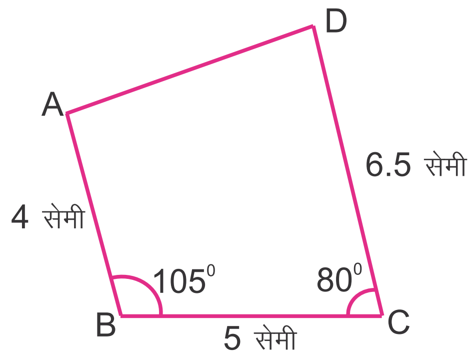
प्रश्नावली 7.3

1. चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसमें AB = BC = 3.0 सेमी, AD = CD = 5.0 सेमी तथा $\angle ABC = 120^0$ हो।
2. चतुर्भुज PQRS की रचना कीजिए जिसमें PQ = 2.8 सेमी, QR = 3.1 सेमी, RS = 2.6 सेमी, SP = 3.3 सेमी व $\angle P = 60^0$ हो।
3. एक आयत की रचना कीजिए जिसकी भुजाएँ 4.2 सेमी और 2.5 सेमी हो इसके विकर्ण की लम्बाई नापिए।
4. एक समचतुर्भुज की रचना कीजिए जिसमें एक कोण 75^0 तथा एक भुजा 5.2 सेमी हो।
5. एक वर्ग बनाइए जिसकी एक भुजा 5.0 सेमी हो।

7.1.4 चतुर्भुज की रचना, जबकि तीन भुजाएँ और उनके बीच दो कोण दिए हों

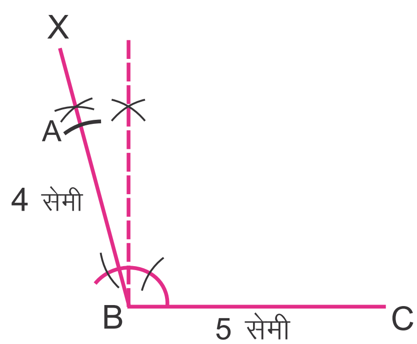
उदाहरण 4 चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए, जबकि भुजाएँ AB = 4.0 सेमी, BC = 5.0 सेमी, CD = 6.5 सेमी और $\angle B = 105^\circ$ और $\angle C = 80^\circ$ है।

हल ABCD का कच्चा चित्र बनाइए सभी नापों को अंकित कीजिए।

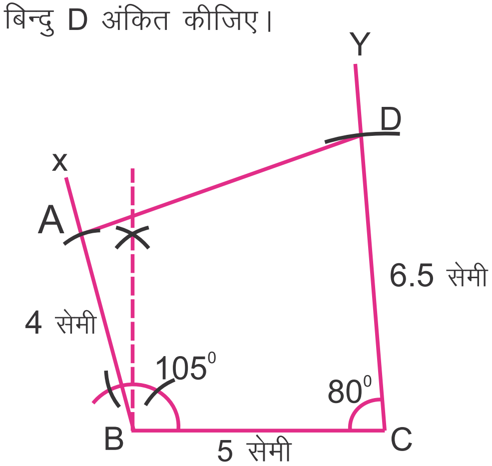


चरण 1 सर्वप्रथम BC= 5 सेमी लम्बाई का रेखा खण्ड खींचिए।

चरण 2 बिन्दु B पर 105° का कोण बनाइए। BX पर B से 4 सेमी का चाप काटिए, जहाँ चाप कटेगा वहाँ बिन्दु A अंकित कीजिए।



चरण 3 बिन्दु C पर 80° का कोण बनाइए। CY पर C से 6.5 सेमी का चाप काटिए। जहाँ चाप कटेगा वहाँ बिन्दु D अंकित कीजिए।



चरण 4 बिन्दु A व D को मिलाइए। इस प्रकार अभीष्ट चतुर्भुज ABCD प्राप्त होता है।

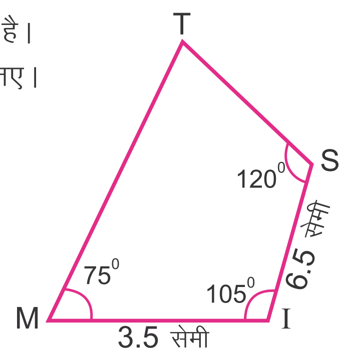
प्रश्नावली 7.4

1. चतुर्भुज KLMN की रचना कीजिए जबकि KL = 4.8 सेमी, LM = 5.0 सेमी, MN = 3.8 सेमी, $\angle L = 72^\circ$, $\angle M = 105^\circ$ है।
2. चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए, जिसमें AB = BC = 3 सेमी, AD = 5 सेमी, $\angle A = 90^0$ और $\angle B = 105^0$ हो।
3. चतुर्भुज PQRS की रचना कीजिए जबकि QR = 3.6 सेमी, RS = 4.5 सेमी तथा PS = 5.0 सेमी, $\angle R = 75^\circ$ और $\angle S = 120^0$ हो।
4. चतुर्भुज DEAR की रचना कीजिए, जबकि DE = 4.7 सेमी, EA = 5.0 सेमी तथा AR = 4.5 सेमी, $\angle E = 60^0$ और $\angle A = 90^\circ$ हो।
5. चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए, जबकि $\angle B = 135^0$, $\angle C = 90^0$, BC = 5.0 सेमी, AB = 9.0 सेमी तथा CD = 7.0 सेमी हो।

7.1.5 चतुर्भुज की रचना, जिसमें दो आसन्न भुजाएँ और तीन कोण दिए हों

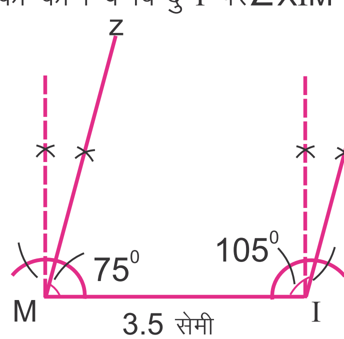
उदाहरण 5 एक चतुर्भुज MIST की रचना कीजिए जहाँ MI= 3.5 सेमी IS= 6.5 सेमी $\angle M = 75^0$, $\angle I = 105^0$ तथा $\angle S = 120^0$ है।

हल कच्चा चित्र बनाकर विभिन्न नापों को अंकित कीजिए।

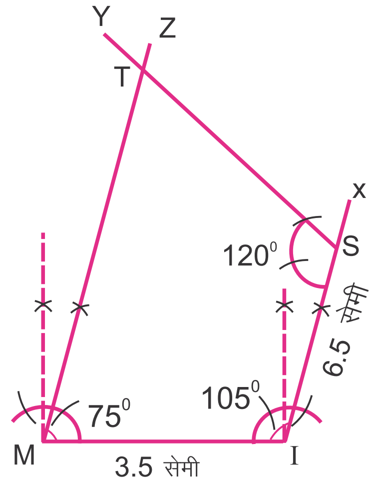


चरण 1 सर्वप्रथम MI = 3.5 सेमी खींचिए।

चरण 2 बिन्दु M पर $\angle M = 75^0$ का कोण व बिन्दु I पर $\angle XIM = 105^0$ का कोण बनाइए।



चरण 3 बिन्दु I से IX पर 6.5 सेमी का एक चाप काटिए वह बिन्दु S है बिन्दु S पर $\angle YSI = 120^0$ का कोण बनाइए। MZ तथा SY का प्रतिच्छेद बिन्दु T है। इस प्रकार MIST एक अभीष्ट चतुर्भुज है।



प्रश्नावली 7.5

1. चतुर्भुज MORE की रचना कीजिए, जिसमें MO= 6 सेमी, OR= 4.5 सेमी, $\angle M = 60^0$, $\angle O = 105^0$, $\angle R = 105^0$ है।
2. चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए, जिसमें $\angle B = 70^0$, $\angle A = 54^0$, $\angle D = 105^0$, AB = 6.2 सेमी, AD = 5.7 सेमी है।
3. चतुर्भुज PQRS की रचना कीजिए, जिसमें $\angle P = 75^0$, $\angle Q = 85^0$, $\angle R = 110^0$, PQ = 4.1 सेमी, QR = 3.9 सेमी है।
4. चतुर्भुज DNSI की रचना कीजिए, जिसमें DN = 2.5 सेमी, NS = 3.7 सेमी, $\angle I = 60^0$, $\angle N = 120^0$, $\angle S = 90^0$ है।

अन्य विशिष्ट स्थितियाँ

अभी तक ऐसे चतुर्भुज की रचना करना सीखा है जिसमें पाँच मापों का प्रयोग किया। क्या किसी ऐसे चतुर्भुज की रचना की जा सकती है जिनके मापों की संख्या इन मापों की संख्या से कम हो। उदाहरणों द्वारा ऐसी विशिष्ट स्थितियों की रचना करते हैं।

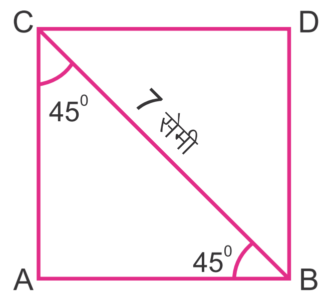
वर्ग वर्ग की रचना करने के लिए निम्नलिखित स्थितियाँ हो सकती हैं
(i) एक भुजा दी हो (ii) एक विकर्ण ज्ञात हो।

आयत आयत की रचना करने के लिए निम्नलिखित स्थितियाँ हो सकती हैं।
(i) दो आसन्न भुजाएँ ज्ञात हो (ii) एक भुजा, एक विकर्ण ज्ञात हो।

समचतुर्भुज समचतुर्भुज की रचना करने के लिए निम्नलिखित स्थितियाँ हो सकती हैं।
(i) एक भुजा तथा एक विकर्ण ज्ञात हो (ii) दो विकर्ण ज्ञात हो।

उदाहरण 6 एक वर्ग की रचना कीजिए जिसमें विकर्ण 7 सेमी हो।

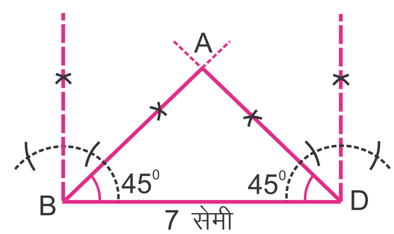
हल वर्ग ABCD का कच्चा चित्र बनाकर मापों को अंकित कीजिए।



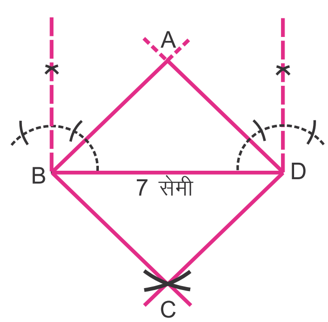
रचना

चरण 1 सर्वप्रथम विकर्ण BD = 7 सेमी खींचिए।

चरण 2 बिन्दु B व D पर BD के एक ही ओर 45^0 - 45^0 के कोण बनाइए। दोनों कोणों की भुजाओं के कटान बिन्दु को A अंकित कीजिए, DA व BA को मिलाइए।

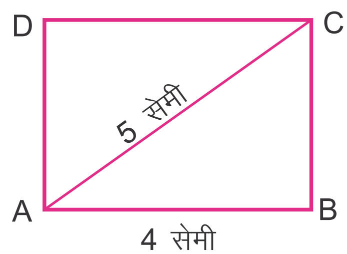


चरण 3 BD के दूसरी ओर B से BA के बराबर व D से DA के बराबर एक चाप काटिए, कटान बिन्दु पर C अंकित कीजिए BC व CD को मिलाइए। इस प्रकार ABCD एक अभीष्ट वर्ग है।



उदाहरण 7 आयत ABCD की रचना कीजिए, जबकि भुजा AB = 4 सेमी तथा विकर्ण AC = 5 सेमी है।

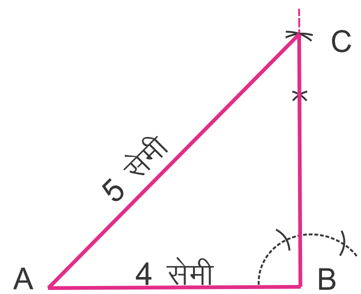
हल आयत ABCD का कच्चा चित्र बनाइए विभिन्न मापों को अंकित कीजिए।



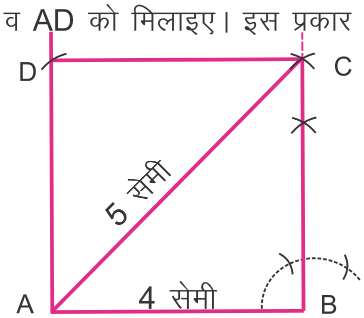
रचना

चरण 1 सर्वप्रथम AB= 4 सेमी खींचिए।

चरण 2 बिन्दु B पर 90^0 का कोण बनाती हुई किरण BX खींचिए एवं बिन्दु A से 5 सेमी का चाप खींचिए जो BX को C पर काटता है AC को मिलाइए।

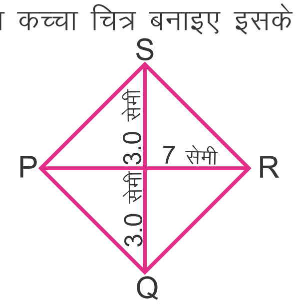


चरण 3 बिन्दु C से AB के बराबर 4 सेमी का चाप काटिए। जो A से BC के बराबर काटे गए चाप को D पर काटे, DC व AD को मिलाइए। इस प्रकार ABCD अभीष्ट आयत प्राप्त होता है



उदाहरण 8 एक समचतुर्भुज PQRS की रचना कीजिए, जिसमें PR= 7 सेमी व QS = 6 सेमी हो।

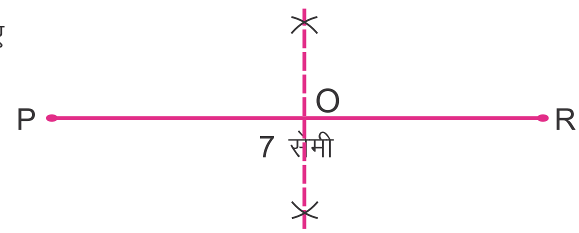
हल समचतुर्भुज PQRS का कच्चा चित्र बनाइए इसके विभिन्न मापों को अंकित कीजिए।

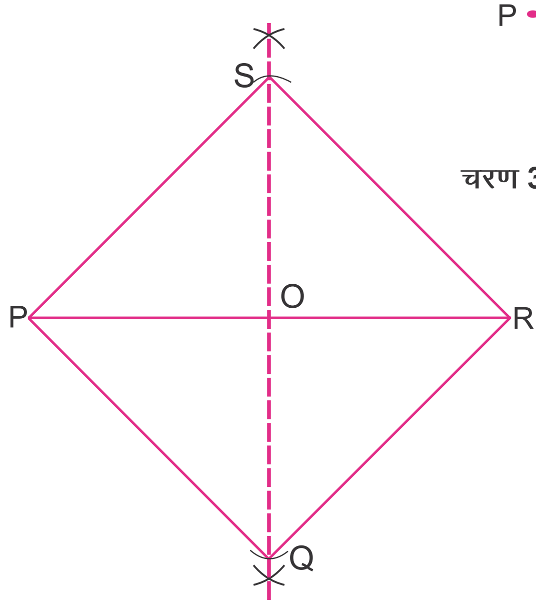


रचना

चरण 1 सर्वप्रथम PR= 7 सेमी खींचिए।

चरण 2 विकर्ण PR का लम्ब अर्द्धक खींचिए जो PR को O पर मिलता है।





चरण 3 O को केन्द्र मानकर OQ = OS = 3 सेमी का चाप लम्बअर्द्धक पर काटिए। PQ, QR, RS व PS को मिलाइए। इस प्रकार अभीष्ट समचतुर्भुज PQRS प्राप्त होता है।

प्रश्नावली 7.6

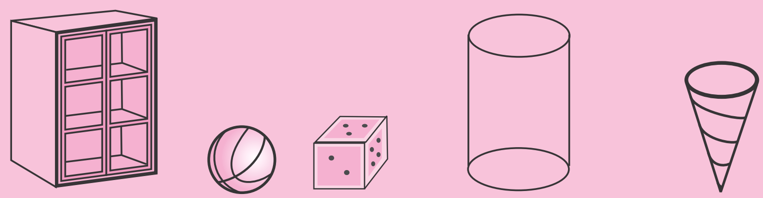
1. वर्ग की रचना कीजिए जिसमें
   (i) भुजाओं का परिमाप 20 सेमी हो।
   (ii) दो आसन्न भुजाओं का योग 9 सेमी हो।
2. वर्ग PQRS के विकर्ण O पर मिलते हैं यदि PO = 2.8 सेमी हो तो वर्ग की रचना कीजिए।
3. आयत की रचना कीजिए जबकि आसन्न भुजाएँ 8 सेमी तथा 6 सेमी हो।
4. आयत PQRS की रचना कीजिए जब कि PQ = 5.5 सेमी तथा विकर्ण QS = 6.2 सेमी हो।
5. आयत EFGH की रचना कीजिए जब कि EF = 4.0 सेमी तथा विकर्ण EG = 5.0 सेमी हो।
6. समचतुर्भुज DEFG की रचना कीजिए जबकि FG = 4.8 सेमी तथा विकर्ण EG = 3.4 सेमी हो।
7. समचतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जबकि BC = 4.0 सेमी तथा कोण B = 75^0 हो।

हमने सीखा

1. चतुर्भुज की चारों भुजाएँ और एक विकर्ण ज्ञात होने पर रचना करना।
2. चतुर्भुज की रचना, जब तीन भुजाएँ और दो विकर्ण ज्ञात हो।
3. चतुर्भुज की रचना जब चार भुजाएँ और एक कोण ज्ञात हो।
4. चतुर्भुज की रचना जब तीन भुजाएँ और उनके बीच के दो कोण दिए हो।
5. चतुर्भुज की रचना जिसमें दो आसन्न भुजाएँ और तीन कोण दिए हो।
6. आयत, समचतुर्भुज, वर्ग की रचना करना।

अध्याय 8
ठोस आकारों का चित्रण

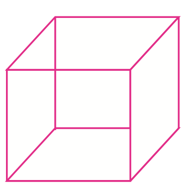
8.1 हमने पिछली कक्षा में विभिन्न ठोस आकारों घन, घनाभ, बेलन, गोला, शंकु आदि के बारे में पढ़ा है। नीचे कुछ वस्तुओं के चित्र दिए है प्रत्येक चित्र को ध्यानपूर्वक देखकर दिए गए प्रश्नों के उत्तर दीजिए।



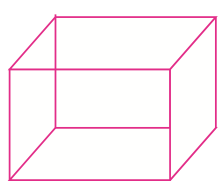
	अलमारी	गेंद	पासा	बेलनाकार ड्रम	आईसक्रीम कोन
1. आकार का नाम	------	------	------	---------	---------
2. कुल पृष्ठों की संख्या	------	------	------	---------	---------
3. सभी पृष्ठ समतल हैं	हाँ/नहीं	हाँ/नहीं	हाँ/नहीं	हाँ/नहीं	हाँ/नहीं
4. समतल पृष्ठ की आकृति	------	------	------	------	------

उक्त सारणी में ऐसे कौन कौन से आकार हैं जिनके सभी पृष्ठ समतल हैं?
आप पाएँगे कि घन, घनाभ के सभी पृष्ठ समतल हैं। ऐसे आकार जिनके सभी पृष्ठ समतल होते हैं, उन्हें बहुफलक कहते हैं। बहुफलक के सभी पृष्ठ बहुभुज होते हैं।

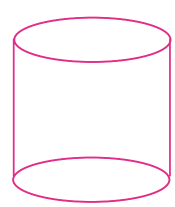
1. घन के सभी पृष्ठ किस आकृति के हैं? ----------------------
2. घनाभ के सभी पृष्ठ किस आकृति के हैं? ----------------------
3. बेलन के समतल पृष्ठ की आकृति क्या है? --------------------



घन



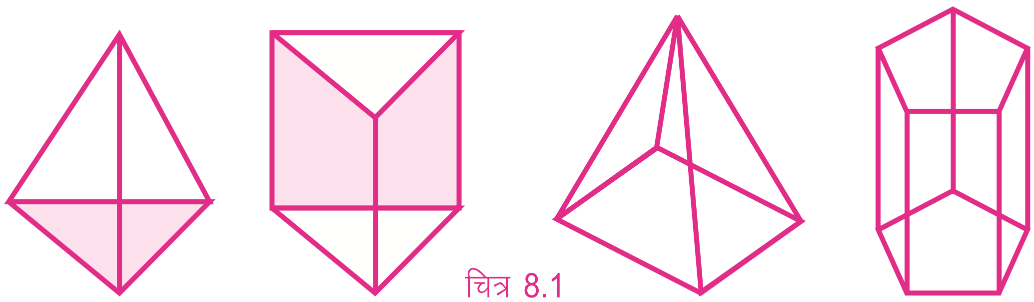
घनाभ



बेलन

आप देखते हैं कि घन के सभी पृष्ठ वर्गाकार तथा घनाभ के सभी पृष्ठ आयताकार हैं

अब निम्न आकृतियों पर चर्चा करते हैं।

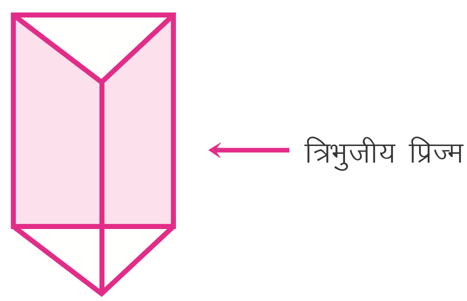


चित्र 8.1

उक्त आकृतियों में चार या चार से अधिक सपाट फलक है तथा ये सपाट फलक बहुभुज आकार के हैं। ये आकृतियाँ भी बहुफलक प्रिज्म तथा पिरामिड है। आइए इनके बारे में अध्ययन करते हैं।

8.2 प्रिज्म

ऐसे बहुफलक जिसका आधार तथा ऊपरी हिस्सा सर्वांगसम बहुभुज हो तथा अन्य फलक (पार्श्व फलक) समान्तर चतुर्भज (आयत या वर्ग) के आकार के हो, प्रिज्म कहलाते हैं।

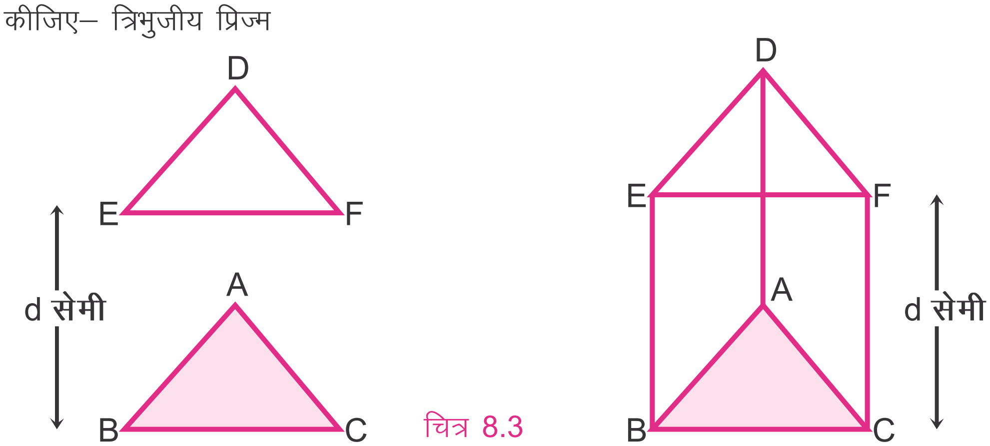


चित्र 8.2

8.2.1 त्रिभुजीय प्रिज्म की आकृति बनाना

त्रिभुजाकार गत्ते का टुकड़ा लेकर उसकी सहायता से कुछ दूरी पर दो त्रिभुज चित्रानुसार बनाइए। संगत शीर्षों के मिलाने पर जो अभीष्ट आकृति प्राप्त होती है, वह त्रिभुजीय प्रिज्म है।

प्रयास कीजिए– त्रिभुजीय प्रिज्म



चित्र 8.3

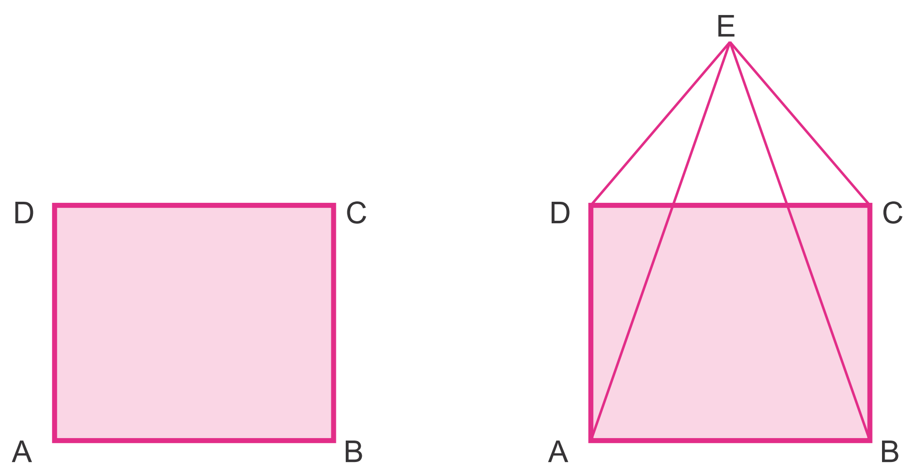
दिए गए त्रिभुजीय प्रिज्म में तीन आयताकार फलक क्रमशः ABED, ADFC, तथा BEFC व दो त्रिभुजाकार फलक क्रमशः ABC, DEF हैं। इस प्रकार त्रिभुजीय प्रिज्म के कुल पाँच फलक होते हैं। इस त्रिभुजीय प्रिज्म में 9 कोर (किनारे) क्रमशः AB, BC, CA, DE, EF, FD, BE, AD तथा CF व 6 शीर्ष क्रमशः A, B, C, D, E तथा F हैं।

8.3 पिरामिड (Pyramid)

ऐसा बहुफलक जिसका आधार एक बहुभुज हो तथा इसके सभी पार्श्व फलक त्रिभुजाकार होते हैं तथा एक ही शीर्ष पर मिलते हो पिरामिड होता है।

वर्गाकार आधार वाले पिरामिड की आकृति बनानाः— एक वर्ग ABCD बनाकर इसे छायांकित करते हैं इस वर्ग के ऊपर लगभग बीच में कुछ दूरी पर एक बिन्दु E लेकर उसे वर्ग के प्रत्येक शीर्ष से मिलाएँ।

इस प्रकार प्राप्त होने वाली आकृति एक प्रकार के पिरामिड की आकृति होगी।

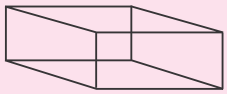
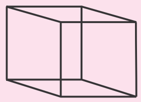
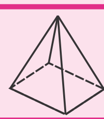
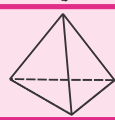
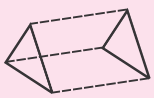


चित्र 8.4

इस पिरामिड में एक वर्गाकार फलक ABCD तथा चार त्रिभुजाकार फलक क्रमशः EAB, EBC, ECD, EDA हैं। इसी प्रकार 8 कोर (किनारे) क्रमशः AB,BC,CD,DA, EA, EB,EC व ED है एवं शीर्ष A, B, C, D व E हैं।

8.4 बहुफलकों के लिए आयलर सूत्र

इस सूत्र के अनुसार प्रत्येक बहुफलक के लिए उसके शीर्षों की संख्या V (vector) किनारों की संख्या E (Edge) तथा फलकों की संख्या F (Face) के मध्य सदैव एक निश्चित संबंध होता है। आइए सारणी से देखते हैं।

क्रम संख्या (1)	आकृति तथा उसका नाम (2)	शीर्षों की संख्या(V)(3)	फलकों की संख्या(F)(4)	किनारों की संख्या(E)(5)	V + F (6)	E + 2 (7)
1	 घनाभ	8	6	12	8 + 6	12 + 2
2	 घन	- -	- -	12	- - - -	- - - -
3	 चतुष्फलक	4	- -	- -	- - - -	- - - -
4	 पिरामिड	4	- -	- -	- - - -	- - - -
5	 प्रिज्म	- -	- -	- -	- - - -	- - - -

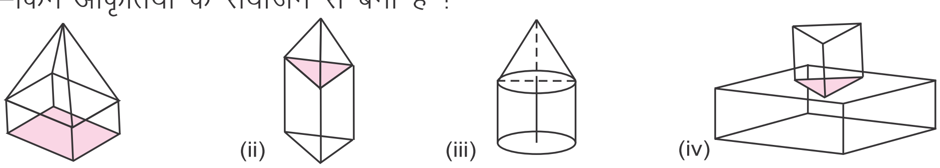
तालिका 8.1

हम देखते है कि कॉलम 6 व 7 के मान समान हैं ? अतः V+F = E +2 होता है।

इस सम्बन्ध को आयलर नामक गणितज्ञ ने स्थापित किया था अतः उन्हीं के नाम पर इसे आयलर सूत्र कहते हैं।

प्रश्नावली 8.1

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।
   (i) पिरामिड का आधार एक बहुभुज तथा शेष फलक ———————————— आकार के होते हैं। (त्रिभुज/समान्तर चतुर्भुज)
   (ii) प्रिज्म का आधार फलक तथा शीर्ष फलक परस्पर ——— होते हैं। (सर्वांगसम/समरूप)
   (iii) किसी बहुफलक में शीर्ष की संख्या 10 तथा फलकों की संख्या 7 है तो उसके किनारों की संख्या ———————— हैं। (15 / 19)
   (iv) घन तथा घनाभ भी एक प्रकार के ————के उदाहरण हैं। (प्रिज्म/पिरामिड)
2. अपने परिवेश में कोई चार बहुफलकी ठोसों के नाम लिखिए तथा उनके फलकों, किनारों और शीर्षों की संख्या लिखिए।
3. 4 सेमी भुजा के समबाहु त्रिभुजाकार आधार लेकर एक त्रिभुजीय प्रिज्म का चित्र बनाइए।
4. नीचे दी गई संयोजित आकृतियों में से बहुफलकीय आकृतियाँ पहचानिये तथा यह भी बताइए कि ये किन–किन आकृतियों के संयोजन से बनी हैं ?



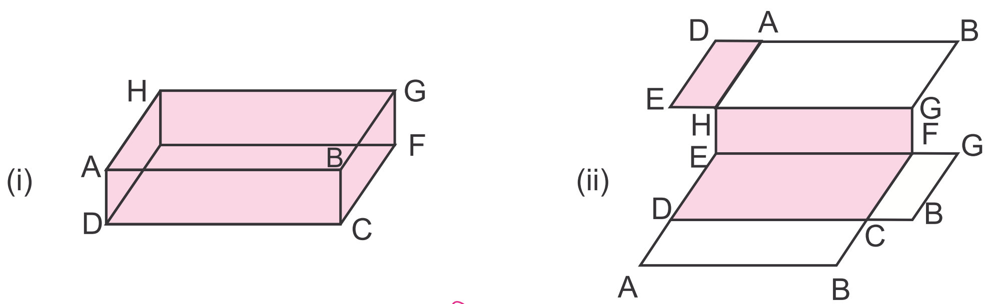
(i) (ii) (iii) (iv)

8.5 त्रिविमीय आकारों का द्विविमीय निरूपण (जाल रूप में)

गत कक्षाओं में हमने विभिन्न ठोसों अर्थात त्रिविमीय आकारों के द्विविमीय निरूपण का अध्ययन किया है। सभी त्रिविमीय आकृतियों को खोलने (प्रसारित करने) पर इनके पृष्ठ (फलक) द्विविमीय आकृतियों के रूप में प्राप्त होते हैं। आइए कुछ ठोस आकारों को प्रसारित कर उनके सम्पूर्ण पृष्ठ को एक जाल रूप में देखते हैं।

8.5.1 घनाभ

एक घनाभ जिसके शीर्ष A,B,C,D,E,F,G,H हैं, के फलक ABCD, ABGH तथा BGFC दृश्य फलक हैं तथा छायांकित (रंगीन) फलक EFGH, EFCD तथा AHED पार्श्व फलक हैं। इस घनाभ को खोलने पर 6 आयताकार फलक (द्विविमीय आकृतियाँ) चित्रानुसार प्राप्त होती हैं।

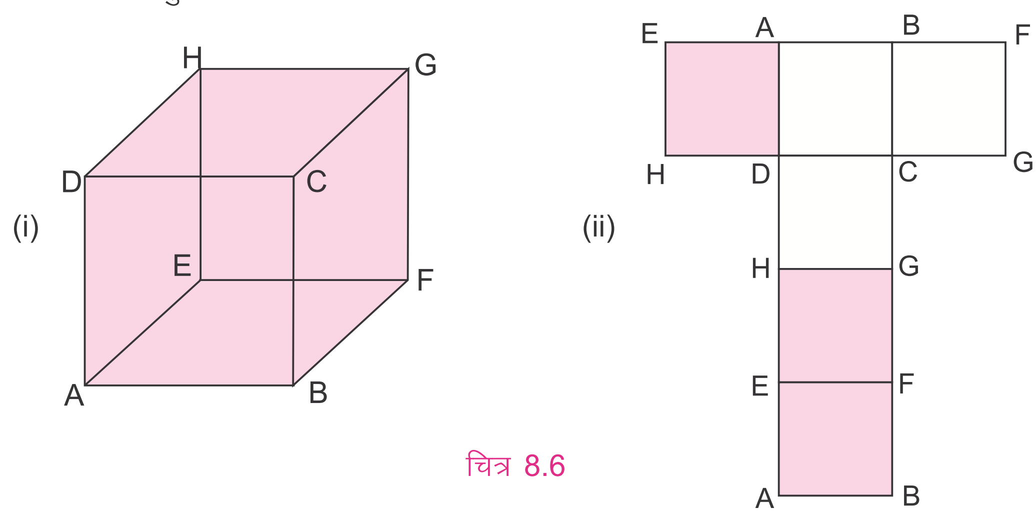


चित्र 8.5

क्या इस घनाभ का प्रसारित चित्र (जाल) अन्य प्रकार का भी हो सकता है। विचार करें।

8.5.2 घन

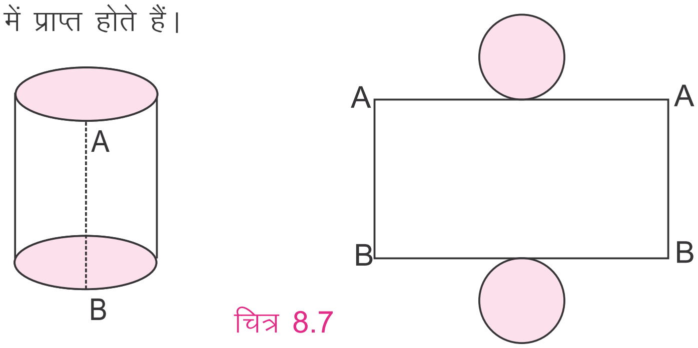
नीचे दिए गए घन के तीन दृश्य फलक ABCD, DCGH तथा BFGC हैं। जबकि फलक EFGH, ABFE तथा AEHD पार्श्व फलक हैं तथा छायांकित (रंगीन) भाग द्वारा प्रदर्शित है। इस घन को खोलने पर चित्रानुसार जाल प्राप्त होता है। जिसके सभी 6 फलक समान तथा वर्गाकार प्राप्त होते हैं।



चित्र 8.6

8.5.3 बेलन

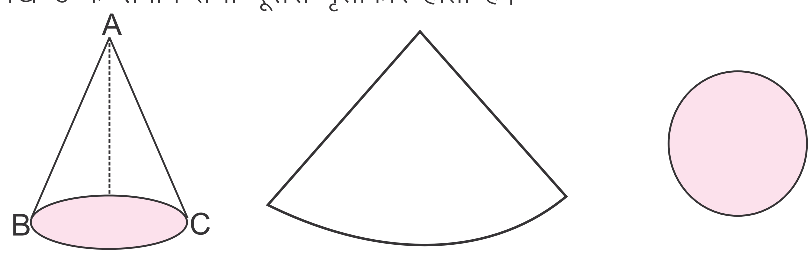
नीचे दिए गए ठोस लम्वृतीय बेलन को बिन्दु रेखा के सहारे खोलने पर इसका वक्राकार पृष्ठ चित्रानुसार एक आयत या वर्ग के रूप में प्राप्त होता है तथा बेलन के दोनों सिरे एक (तल तथा ढ़क्कन) वृताकार रूप में प्राप्त होते हैं।



चित्र 8.7

8.5.4 शंकु

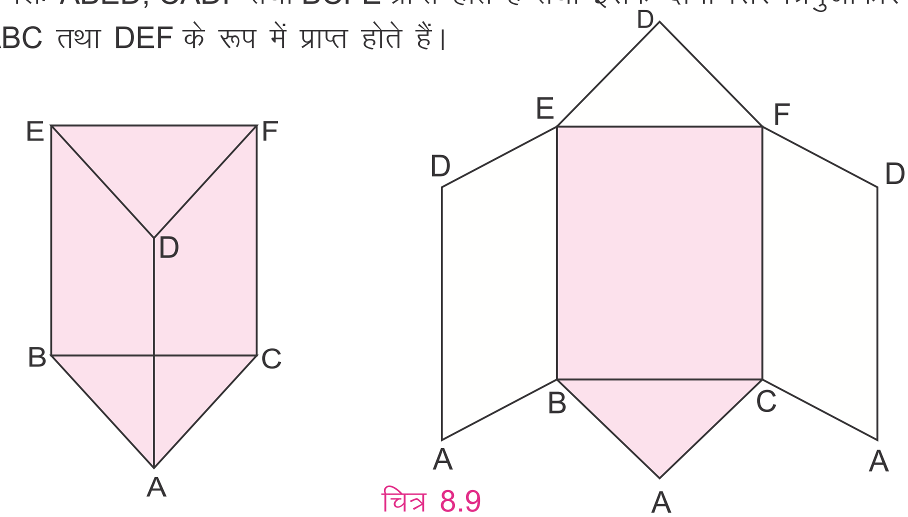
नीचे दिए गए शंकु के दो पृष्ठ है। जिनमें से एक पृष्ठ वक्राकार तथा दूसरा पृष्ठ वृत्ताकार है। इस शंकु को AB के सहारे काटने पर हमें दो द्विविमीय आकृतियाँ प्राप्त होती हैं। जिनमें से एक वृत्त के त्रिज्यखण्ड के समान तथा दूसरी वृत्ताकार होती है।



चित्र 8.8

8.5.5 प्रिज्म

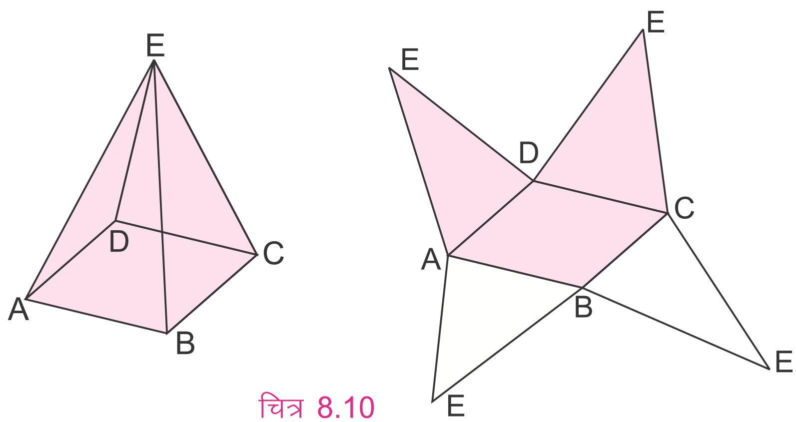
चित्रानुसार एक प्रिज्म जिसके शीर्ष A,B,C,D,E,F है, को खोलने पर उसके तीन आयताकार फलक क्रमशः ABED, CADF तथा BCFE प्राप्त होते हैं तथा इसके दोनों सिरे त्रिभुजाकार फलकों क्रमशः ABC तथा DEF के रूप में प्राप्त होते हैं।



चित्र 8.9

8.5.6 पिरामिड

यहाँ एक वर्गाकार आधार वाला पिरामिड है जिसके दृश्य फलक ABE तथा BCE है तथा फलक ADE तथा CDE पार्श्व फलक व ABCD आधार फलक हैं।

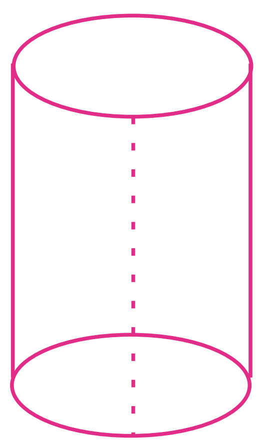


चित्र 8.10

उक्त पिरामिड को खोलने पर हमें चित्रानुसार द्विविमीय जाल प्राप्त होता है। इस जाल में एक फलक ABCD वर्गाकार आकृति का तथा 4 फलक क्रमश : ABE, BCE, CDE तथा DAE त्रिभुजाकार प्राप्त होते है।

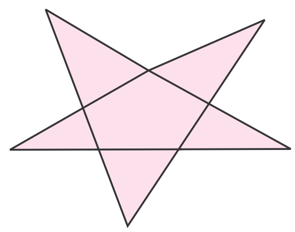
प्रश्नावली 8.2

1. एक घनाभ तथा घन के आकार के ठोस को खोलने पर बनने वाले जाल को दो अलग–अलग प्रकार से बनाइए (पुस्तक में दिए गए जालों के अतिरिक्त)
2. नीचे दिए गए एक खोखले लम्बवृत्तीय बेलन को बिन्दु रेखा के अनुदिश काटने पर प्राप्त द्विविमीय आकृतियों को दर्शाइए।

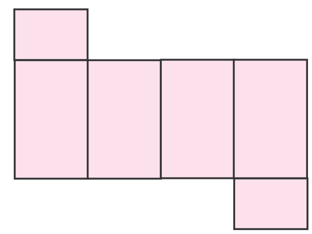


3. निम्न प्रसारित चित्रों को मोड़कर (पृष्ठों को मिलाकर) बनने वाली ठोस आकृति का चित्र बनाइए।

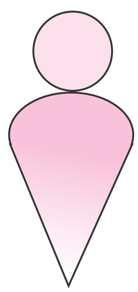
(i)



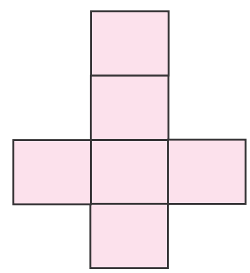
(ii)



(iii)



(iv)



हमने सीखा

1. बहुफलक – ऐसे ठोस जिनके सभी पृष्ठ समतल हो।
2. प्रिज्म – ऐसा बहुफलक जिसका आधार तथा ऊपरी हिस्सा सर्वांगसम बहुभुज हो तथा अन्य फलक समान्तर चतुर्भुज के आकार के हो प्रिज्म कहलाता है।
3. पिरामिड – ऐसा बहुफलक जिसका आधार एक बहुभुज हो तथा इसके सभी पार्श्व फलक त्रिभुजाकार होते हैं तथा एक ही शीर्ष पर मिलते हों।
4. बहुफलकों के लिए आयलर सूत्र –

$$\boxed{V + F = E + 2}$$

5. त्रिविमीय आकारों जैसे – घन, घनाभ, शंकु, बेलन, प्रिज्म एवं पिरामिड को द्विविमीय निरूपण जाल रूप में करना।

अध्याय 9

बीजीय व्यंजक

9.1 नीचे दिए गए व्यंजकों पर विचार कीजिए

(i) $2n+1$ (ii) 0 (iii) $5xy$ (iv) $15 + 7 + 0$ (v) $3\frac{p}{q}$ (vi) $\frac{4}{5}a^2b$

इनमें से कौनसे संख्यात्मक व्यंजक हैं कौन से बीजीय व्यंजक है। आप पाएँगे '0', 15+7+0, संख्यात्मक व्यंजक हैं जबकि $2n+1$, $5xy$, $3\frac{p}{q}$ तथा $\frac{4}{5}a^2b$ बीजीय व्यंजक हैं क्योंकि ये बीजों व संख्याओं के मेल से बने हैं।

जैसा कि आप जानते हैं बीजीय व्यंजक संख्याओं और बीजों के मेल से बनते हैं। बीजांक चर व अज्ञात को प्रदर्शित करते हैं। जैसे $3x+5$ में बीजांक x तथा संख्याएँ 3 व 5 से बना है।

पुनः हमने पिछली कक्षा में अध्ययन किया है कि बीजीय व्यंजक को उनके पदों की संख्या के आधार पर एक पदी, द्विपदी, त्रिपदी आदि कहा जाता है।

एकपदी

x, $\frac{p}{4}$, m^2

$307q$, a^3

द्विपदी

$2x + y$

$5p + 4$

$3a^2 + 5b$

त्रिपदी

$m^2 + 2m + 5$

$a^2 + b + 3c$

$a^3 + b^3 + c^3$

$m + 2 + p + l$

$a_1 + a_2 + a_3 + ...a_m$

बहुपदी

करो और सीखो

आप 5 संख्यात्मक तथा 5 बीजीय व्यंजक और लिखिए तथा उनमें से एकपदी, द्विपदी एवं त्रिपदी छाँटिए।

9.2 व्यंजक की घात

किसी व्यंजक में उसके उच्चतम घात वाले पद की घात व्यंजक की घात कहलाती है जैसे $7x^3y$ में पद की घात $3 + 1 = 4$ है। इसके अतिरिक्त द्विपदी $7x^3y-3x$ की घात 4 है। जबकि $5p^2q-3pq+7qr$ में उच्चतम घात वाला पद $5p^2q$ व इसकी घात $2+1=3$ है।

9.3 सजातीय एवं विजातीय पद

नीचे कुछ बीजीय व्यंजकों के पद दिए जा रहे हैं इन्हें ध्यान से देखें–

सजातीय	विजातीय
$4x \quad -2x$ $x, \quad -x$	$5x, 5x^2$ x^3, xy, y^2x
pq, $5pq$ $\frac{3}{5}pq$	$\frac{3}{5}pq$, $\frac{3}{5}p, q$ p^2q, pq^2

करो और सीखो

बताइए कि सजातीय होने के लिए क्या–क्या आवश्यक है?

(i) समान चिह्न (ii) समान गुणांक (iii) समान घात (iv) चरों की समान संख्या

हमने देखा कि सजातीय पदों में चर तथा उसका घात, समान होता है जबकि गुणांक बदल रहे हैं। वहीं विजातीय पदों में या तो चर समान नहीं है या उनकी घात समान नहीं है अथवा दोनों ही समान नहीं है चाहे गुणांक बराबर हो पर जब तक चर तथा घातांक समान नहीं हों, पद सजातीय नहीं होते हैं।

करो और सीखो

(1) निम्न में से सजातीय पदों को छाँटिए।
ax^2y, $2n$, $5y^2$-$7x^2$, $-3n$, $7xy$, $25y^2$

(2) $7xy^2$ के लिए 3 सजातीय पद लिखिए।

9.4 बीजगणितीय व्यंजकों का योग और व्यवकलन

कक्षा–7 में हमने सीखा की सजातीय पदों को आपस में जोड़ा या घटाया जा सकता है उनके गुणांक जुड़ते/घटते हैं जैसे $7x+4x=11x$ न कि $11x^2$ अर्थात $x+x \neq x^2$, $2x^2y+3xy = ?$ बीजांकों की घातें वही रहती हैं।

जैसे – $7x^2y-3x^2y=4x^2y$

करो और सीखो

निम्न सजातीय पदों का योग कर रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए।	
$4n + (-3n) =$	$-5x^2y + (-3x^2y) =$...........
$5pq + 12pq =$...........	$2ab^2 + 11ab^2 =$.............

विजातीय पदों में न गुणांक जुड़ते हैं न ही घातें जुड़ती हैं। उनके योग में उन्हें +/− के चिह्न के साथ ज्यों का त्यों लिखा जाता है

जैसे $(7a^2b) + (3a^2b^2) = 7a^2b + 3\ a^2b^2$

$(-3pq) - (+p^3) = -3pq - p^3$

इस उदाहरण से समझने का प्रयास करें !

उदाहरण 1 $3x^2 + 4xy + 2y^2$ और $5y^2 - xy + 7x^2$ का योग कीजिए।

हल एक सीध में सजातीय पदों को एक ही स्तम्भ में लिखें ध्यान रहे पूर्णांकों के चिह्न भी साथ लिखें।

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 4xy + 2y^2 \\ +7x^2 - \ xy + 5y^2 \\ \hline 10x^2 + 3xy + 7y^2 \\ \hline \end{array}$$

या

$$\begin{array}{ccc} x^2 & xy & y^2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 7 & -1 & 5 \\ \hline 10 & 3 & 7 \\ \hline \end{array}$$

अतः $10x^2 + 3xy + 7y^2$

करो और सीखो

1. शीला कहती है $2pq$ और $4pq$ का योग $8p^2q^2$ है क्या वह सही है ?
2. रईस ने $4p$ और $7q$ का योग किया और $11pq$ परिणाम मिला क्या तुम रईस से सहमत हो ?

उदाहरण 2 $15xy + 7x^2 - 3y^2$ में से $3xy + 9y^2$ घटाइए।

हल योग की भाँति घटाव में भी सजातीय पदों को एक सीध मे रखते हुए स्तंभ मे लिखिए। घटाने वाले व्यंजक के प्रत्येक पद का चिह्न बदलिए फिर योग कीजिए।

$$\begin{array}{ccc} 15xy & + 7x^2 & - 3y^2 \\ 3xy & + & + 9y^2 \\ - & - & - \\ \hline 12xy & + 7x^2 & - 12y^2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} x^2 & xy & y^2 \\ 7 & 15 & -3 \\ & -\ 3 & -\ 9 \\ \hline 7 & 12 & -12 \\ \hline \end{array}$$

अतः घटाव $7x^2 + 12xy - 12y^2$ होगा।

ध्यान दीजिए कि संख्या को घटाना, उसके योज्य प्रतिलोम को जोड़ने के समान हैं इस तरह -5 घटाना या +5 जोड़ना एक ही बात है। इसी प्रकार $-3xy$ घटाना या $+3xy$ जोड़ना भी एक ही बात है।

दूसरा तरीका

=> $15xy + 7x^2 - 3y^2 - (3xy + 9y^2)$

=> $15xy + 7x^2 - 3y^2 - 3xy - 9y^2$

=> $15xy - 3xy + 7x^2 - 3y^2 - 9y^2$

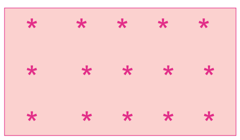
=> $12xy + 7x^2 - 12y^2$

करो और सीखो

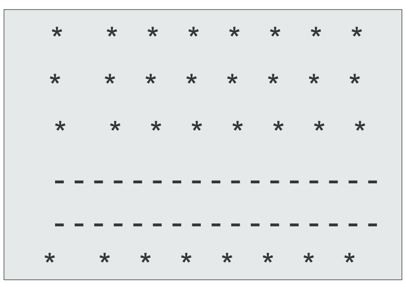
1. यदि $A = 2y^2 + 3x - x^2$ तथा $B = 3x^2 - x^2$ हो तो A+B तथा A-B ज्ञात कीजिए।

9.5 बीजीय व्यंजकों का गुणा

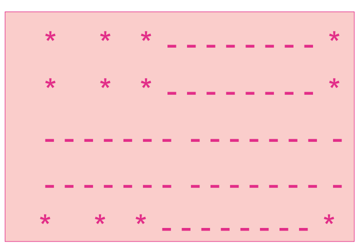
राकेश और लीला सितारों की जमावट का खेल खेल रहे हैं।



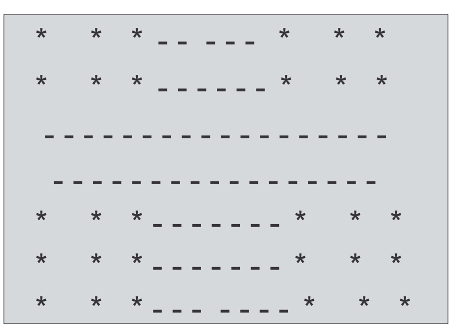
प्रत्येक पंक्ति में 5 सितारे हो और ऐसी 3 पंक्तियाँ हों तो कुल सितारे = 5 x 3



यदि प्रत्येक पंक्ति में 8 सितारे हों और ऐसी n पंक्ति बनाएँ तो कुल कितने सितारे चाहिए ? = 8 x n



यदि प्रत्येक पंक्ति में p सितारे हो तथा कुल q पंक्तियाँ बनाएँ तो कुल सितारे = $p \times q$ सितारे



प्रत्येक पंक्ति में $q + 3$ सितारे तथा पंक्तियों की संख्या $p + 2$ है तो कुल सितारे होंगे = $(p + 2)(q + 3)$

(i) आप भी ऐसी और स्थितियाँ बताइए जहाँ दो बीजीय व्यंजकों का गुणन करना पड़ता है।

(ii) करीना ने कहा, हाँ जब हम वर्ग का क्षेत्रफल निकालते हैं तब यदि वर्ग की भुजा $(x + 5)$ है तो क्षेत्रफल होगा $(x + 5)(x + 5)$

(iii) राजू ने कहा ऐसा त्रिभुज में भी होगा यदि आधार $(m + 3)$ और ऊँचाई $4x$ हो तो क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times 4x \times (m + 3)$ होगा

(iv) सरिता ने ध्यान दिलाया कि जब हम वस्तुएँ खरीदते हैं तो हमें गुणा करना पड़ता है। उदाहरण के लिए यदि एक दर्जन केलों का मूल्य x रू हो तो z दर्जन केलों का मूल्य $= xz$ रू होगा। केले 3 रू प्रति दर्जन महंगे हो गए तो केलों का मूल्य $(x + 3)$ रू और यदि $(z - 2)$ दर्जन केलों की आवश्यकता है तो कुल मूल्य

$$(x + 3)(z - 2)$$

ऊपर के सभी उदाहरणों में, हमें दो या दो से अधिक राशियों का गुणा करना पड़ेगा। यदि राशियाँ, बीजीय व्यंजकों द्वारा दी गयी हो, हमें उनका गुणनफल ज्ञात करना आवश्यक है।

आइए बीजीय व्यंजकों का गुणन क्रमिक रूप में सीखें।

9.5.1 एक पदीय व्यंजक का एक पदीय व्यंजक से गुणा

हम जानते हैं कि

$$5 \times x = x + x + x + x + x = 5x$$

और $$3 \times (5x) = 5x + 5x + 5x = 15x$$

अब, निम्न गुणा को ध्यान से देखिए–

(i) $x \times 3y = x \times 3 \times y = 3 \times x \times y = 3xy$

(ii) $5x \times 3y = 5 \times x \times 3 \times y = 5 \times 3 \times x \times y = 15xy$

(iii) $5x \times (-3y) = 5 \times x \times (-3y) = (5) \times (-3) \times x \times y = -15xy$

(iv) $5x \times 4x^2 = 5 \times 4 \times x \times x^2 = 20 \times x^3 = 20x^3$

(v) $5x \times (-4xyz) = (5 \times -4)(x \times xyz) = -20x \times xyz = -20x^2yz$

दो से अधिक एक पदीय व्यंजकों का गुणा–

(i) $3x \times 5y \times 4z$

$= (3x \times 5y) \times 4z$

$= 15xy \times 4z$

$= 60xyz$

(ii) $2x^2y \times (-4y^2z) \times (-7z^2x) \times (2x^2yz)$

$= [2x^2y \times (-4y^2z)] \times [(-7z^2x) \times (2x^2yz)]$

$= (-8x^2y^3z) \times (-14x^3yz^3)$

$= +112x^5y^4z^4$

प्रश्नावली 9.1

1. नीचे दिए गए बीजीय व्यंजकों का गुणा करके गुणनफल लिखिए।
   (i) $3 \times 5x$ (ii) $-5p, -2q$ (iii) $7l^2, -3n^2$
   (iv) $6m, 3n$ (v) $-5x^2, -2x$

2. नीचे दी गई गुणन सारणी को गुणा करके पूरा कीजिए।

x	7	x	y	$2z$	z	$-5b$	c
7	49						
x							
$2y$							
$-3a$			$-3ay$				
b							
y							
$2x^3$							
a^4					a^4z		
z^2							

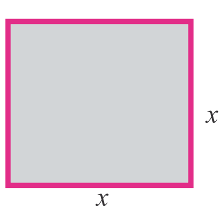
3. निम्न एक पदीय व्यंजकों का गुणनफल ज्ञात कीजिए।
   (i) xy, x^2y, xy, x (ii) m, n, mn, m^3n, mn^3
   (iii) kl, lm, km, klm

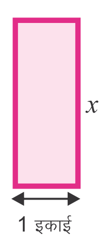
4. यदि मूलधन (P) = $4x^2$, समय (T) = $5x$ और दर (R) = $5y$ हो तो ब्याज $= \dfrac{PTR}{100}$ क्या होगा ?

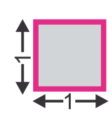
9.5.2 द्विपदी या त्रिपदी को एक पदी से गुणा

गतिविधि – 1

गत्ते का वर्गाकार टुकड़ा काटिए। माना इसकी एक भुजा x है, 1 इकाई चौड़ाई (जैसे 1 सेमी या 1 इन्च) की व x इकाई लम्बी पाँच आयताकार पट्टियाँ तथा एक वर्ग इकाई के पाँच गत्ते के टुकड़े भी काटिए।

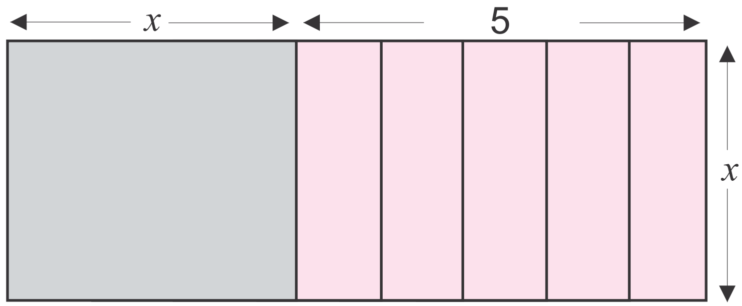






1 वर्ग इकाई

$x(x+5)$ अर्थात् ऐसे आयत का क्षेत्रफल जिसकी लम्बाई x एवं चौड़ाई $(x+5)$ है। वर्गाकार गत्ते का टुकड़ा लीजिए। मान लीजिए इसकी एक भुजा 'x' है इसके साथ x इकाई लम्बी व एक इकाई चौड़ी, पाँच पट्टियों को जमाइए। जैसा कि नीचे चित्र मे दर्शाया गया है।



नए आयत की लम्बाई = $x + 5$ इकाई

नए आयत की चौड़ाई = x इकाई

नई आकृति का क्षेत्रफल = $x(x+5)$ वर्ग इकाई

अतः $x(x+5)$ = x भुजा वाले वर्गाकार गत्ते का क्षेत्र + जोड़ी गई पाँच पट्टियों का क्षेत्रफल

$= x^2 + x + x + x + x + x$

$= x^2 + 5x$

पुनः देखिए $x(x+5) = x \times x + x \times 5$

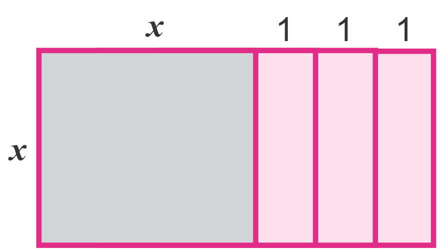
$= x^2 + 5x$

9.5.3 द्विपदीय व्यंजक का द्विपदीय व्यंजक से गुणा

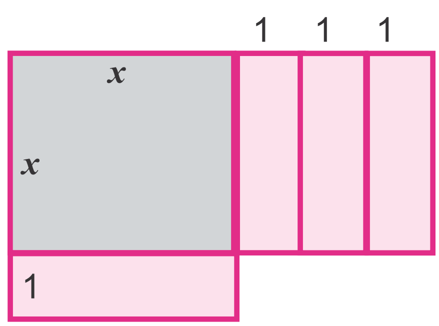
$(x+1)\ (x+3)$

x भुजा वाले गत्ते का टुकड़ा लीजिए।

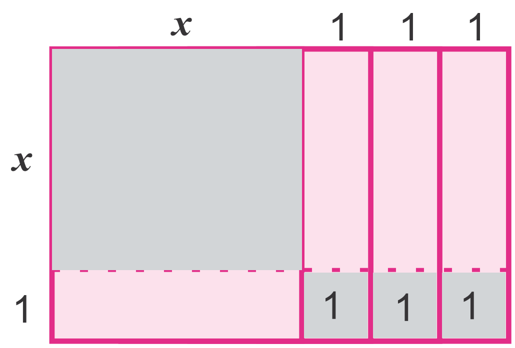
x इकाई लम्बी एक व एक इकाई चौड़ी तीन पट्टियों को गत्ते के टुकड़े के साथ मिलाकर रखिए।



एक पट्टी इकाई चौड़ाई की इसके नीचे जोड़िए।



इसे आयताकार बनाने के लिए एक इकाई भुजा वाले तीन वर्गाकार टुकड़ों को जोड़िए।



नए आयत की लम्बाई = $(x + 3)$ इकाई
नए आयत की चौड़ाई = $(x + 1)$ इकाई
नए आयत का क्षेत्रफल = $(x + 3)(x + 1)$ वर्ग इकाई

अतः $(x + 3)(x + 1)$ = x भुजा वाले वर्गाकार गत्ते का क्षेत्र + जोड़ी गई चार पट्टियों का क्षेत्रफल + जोड़े गए तीन वर्गाकार टुकड़ों का क्षेत्रफल
$= x^2 + 4x + 3$

पुनः देखिए $(x+3)(x+1)$
$= x(x+1) + 3(x+1)$
$= x^2 + x + 3x + 3$
$= x^2 + 4x + 3$

दो द्विपदी के गुणा में पहले द्विपद के प्रत्येक पद को दूसरे द्विपद से गुणा करेंगे फिर वितरण नियम का उपयोग करते हुए एक पदी को द्विपद से गुणा करेंगे।

9.5.4 द्विपदी को त्रिपदी से गुणा करना

द्विपदी $(2x + 3y)$ एवं त्रिपदी $(3x + 4y - 5z)$ बीजीय पद है। अब हम $(2x + 3y)$ को त्रिपदी $(3x + 4y - 5z)$ द्वारा गुणा करेंगे।

$(2x + 3y)\ (3x + 4y - 5z)$
$= 2x\ (3x + 4y - 5z) + 3y\ (3x + 4y - 5z)$ (पहले व्यंजक के दोनों पदों का दूसरे व्यंजक से गुणा करेंगे)
$= 2x \times 3x + 2x \times 4y + 2x \times (-5z) + 3y \times 3x + 3y \times 4y + 3y \times (-5z)$
$= 6x^2 + 8xy - 10xz + 9xy + 12y^2 - 15yz$

अब समान पदों की जोड़–घटा करेंगे।
$= 6x^2 + (8xy + 9xy) - 10xz + 12y^2 - 15yz$
$= 6x^2 + 17xy - 10xz + 12y^2 - 15yz$

प्रश्नावली 9.2

1. नीचे दिए गए द्विपदों का गुणा कीजिए –
   (i) $(2x + 5)$ और $(3x - 7)$
   (ii) $(x - 8)$ और $(3y + 5)$
   (iii) $(1.5p - 0.5q)$ और $(1.5p + 0.5q)$
   (iv) $(a + 3b)$ और $(x + 5)$
   (v) $(2lm + 3m^2)$ और $(3lm - 5m^2)$
   (vi) $\left(\frac{3}{4}a^2 + 3b^2\right)$ और $\left(4a^2 - \frac{5}{3}b^2\right)$

2. गुणनफल ज्ञात कीजिए।

(i) $(3x + 8)(5 - 2x)$ (ii) $(x + 3y)(3x - y)$

(iii) $(a^2 + b)(a + b^2)$ (iv) $(p^2 - q^2)(2p + q)$

3. सरल कीजिए।

(i) $(x + 5)(x - 7) + 35$ (ii) $(a^2 - 3)(b^2 + 3) + 5$ (iii) $(t + s^2)(t^2 - s)$

(iv) $(a + b)(c - d) + (a - b)(c + d) + 2(ac + bd)$

(v) $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$ (vi) $(a + b + c)(a + b - c)$

(vii) $(a + b)(a - b) - a^2 + b^2$

9.6 सर्वसमिका क्या है ?

निम्न समीकरण पर विचार कीजिए–

$$x(x + 5) = x^2 + 5x$$

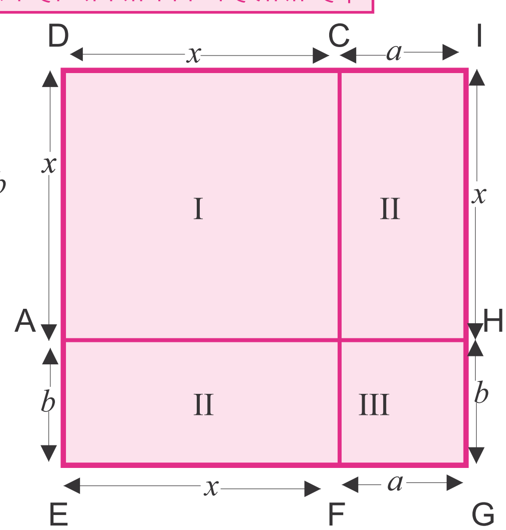
x के विभिन्न मानों के लिए जाँच करते हैं–

	LHS	RHS
$x = 1$	$1(1 + 5) = 1 \times 6 = 6$	$(1)^2 + 5(1) = 1+5 = 6$
$x = 2$	$2(2 + 5) = 2 \times 7 = 14$	$(2)^2 + 5(2) = 4+10 = 14$

आप x के और मानों के लिए समिका की जाँच कीजिए, आपने देखा की $x(x + 5) = x^2 + 5x$ x के सभी मानों के लिए सत्य है, इसे सर्वसमिका कहते हैं।

ऐसी समिका जो चर के सभी मानो के लिए सत्य हो सर्वसमिका कहलाती है।

गतिविधि $(x + a)(x + b)$



(i) वर्ग ABCD का क्षेत्रफल $= x^2$

(ii) आयत AEFB का क्षेत्रफल $= x \times b = bx$

(iii) आयत FGHB का क्षेत्रफल $= a \times b = ab$

(iv) आयत BHIC का क्षेत्रफल $= a \times x = ax$

आयत DEGI का क्षेत्रफल = I + II + III + IV

$$(x + a)(x + b) = x^2 + ax + bx + ab$$
$$= x^2 + (a + b)x + ab$$

9.6.1 मानक सर्वसमिका

निम्न सर्वसमिका पर विचार कीजिए

$(a + b)(a + b)$ अथवा $(a + b)^2$

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$
$$= a(a+b) + b(a+b)$$
$$= a^2 + ab + ba + b^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2 \qquad \text{(क्योंकि } ab = ba\text{)}$$

अतः:

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2} \qquad \text{- I}$$

स्पष्टतः यह एक सर्वसमिका है क्योंकि वास्तविक गुणन द्वारा LHS से RHS प्राप्त किया गया है। आप सत्यापित कर सकते हैं कि a तथा b के किसी भी मान के लिए सर्वसमिका के दोनों पक्षों के मान समान हैं।

इसके पश्चात हम गुणनफल $(a - b)(a - b)$ अथवा $(a - b)^2$ के बारे मे चर्चा करते हैं।

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$$
$$= a(a-b) - b(a-b)$$
$$= a^2 - ab - ba + b^2$$
$$= a^2 - 2ab + b^2 \qquad (ab = ba)$$

$$\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2} \qquad \text{- II}$$

अब $(a + b)(a - b)$ पर विचार करते हैं।

$$(a+b)(a-b) = a(a-b) + b(a-b)$$
$$= a^2 - ab + ba - b^2$$
$$= a^2 - b^2 \qquad \text{क्योंकि} \qquad (ab = ba)$$

अतः:

$$\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2} \qquad \text{- III}$$

करो और सीखो

सर्वसमिका (i) मे b के स्थान पर $-b$ रखिए। क्या आपको सर्वसमिका (ii) प्राप्त होती है ?

9.6.2 सर्वसमिकाओं का उपयोग

द्विपद व्यजंकों के गुणा और संख्याओं के गुणन में सर्वसमिकाओं का उपयोग करने से गुणा आसान हो जाता है। आइए उदाहरण से समझें।

उदाहरण 3 $(2x + 3y)^2$ तथा $(103)^2$ को सर्वसमिकाओं की सहायता से हल कीजिए।

(i) $(2x+3y)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2$

$$= 4x^2 + 12xy + 9y^2$$

(ii) $(103)^2 = (100 + 3)^2$
$= 100^2 + 2 \times 100 \times 3 + 3^2$
$= 10000 + 600 + 9$
$= 10609$

हम 103 को सीधे 103 से गुणा करके भी वांछित उत्तर प्राप्त कर सकते हैं क्या आपने ध्यान दिया कि 103 को सर्वसमिका (I) से सरलता से किया जाता है।

उदाहरण 4 $(7.9)^2$ ज्ञात कीजिए–
$= (8.0 - 0.1)^2$
$= (8.0)^2 + 2 \times 8.0 \times 0.1 + (0.1)^2$
$= 64 - 1.6 + 0.01$
$= 62.41$

प्रश्नावली 9.3

1. उचित सर्वसमिका का उपयोग करते हुए निम्न गुणनफल ज्ञात कीजिए।
   (i) $(x + 5)(x + 5)$ (ii) $(3x + 2)(3x + 2)$
   (iii) $(5a - 7)(5a - 7)$ (iv) $(3p - \frac{1}{2})(3p - \frac{1}{2})$
   (v) $(1.2m - 0.3)(1.2m - 0.3)$ (vi) $(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)$
   (vii) $(6y + 7)(-6y + 7)$ (viii) $(7a + 9b)(7a - 9b)$

2. निम्न व्यंजकों का गुणा सर्वसमिका $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ का उपयोग करते हुए कीजिए।
   (i) $(x + 1)(x + 2)$ (ii) $(3x + 5)(3x + 1)$
   (iii) $(4x - 5)(4x - 1)$ (iv) $(3a + 5)(3a - 8)$
   (v) $(xyz - 1)(xyz - 2)$

3. सर्वसमिका का उपयोग करते हुए निम्नलिखित वर्गों को ज्ञात कीजिए।
   (i) $(b - 7)^2$ (ii) $(xy + 3z)^2$ (iii) $(6m^2 - 5n)^2$
   (iv) $\left(\frac{3}{2}x + \frac{2}{3}y\right)^2$

4. सरल कीजिए।
   (i) $(a^2 - b^2)^2$ (ii) $(2n + 5)^2 - (2n - 5)^2$
   (iii) $(7m - 8n)^2 + (7m + 8n)^2$ (iv) $(m^2 - n^2m)^2 + 2m^3n^2$

5. दर्शाइए कि –

(i) $(2a + 3b)^2 – (2a – 3b)^2 = 24ab$

(ii) $(4x + 5)^2 – 80x = (4x - 5)^2$

(iii) $(3x – 2y)^2 + 24xy = (3x + 2y)^2$

(iv) $(a - b) (a + b) + (b - c) (b + c) + (c - a) (c + a) = 0$

6. उपयुक्त सर्वसमिका का उपयोग करते हुए निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए।

(i) 99^2 (ii) 103^2 (iii) 297 x 303 (iv) 78 x 82

7. $a^2 - b^2 = (a + b) (a - b)$ का उपयोग करते हुए निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए।

(i) $101^2 - 99^2$ (ii) $(10.3)^2 - (9.7)^2$ (iii) $153^2 - 147^2$

8. $(x+ a) (x + b)=x^2 + (a + b)x + ab$ का उपयोग करते हुए निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए।

(i) 103 x 102 (ii) 7.1 x 7.3 (iii) 102 x 99 (iv) 9.8 x 9.6

हमने सीखा

1. चरों एवं अचरों की सहायता से व्यंजक बनते हैं।
2. व्यंजक जिनमें एक, दो तथा तीन पद होते हैं क्रमशः एकपदी, द्विपदी और त्रिपदी कहलाते हैं। सामान्यतः एक अथवा अधिक पदों वाला व्यंजक जिसमें पदों के गुणांक शून्येतर हैं और चरों की घात धनात्मक है, बहुपद कहलाता है।
3. किसी व्यंजक में उसके उच्चतम घात वाले पद की घात व्यंजक की घात कहलाती है।
4. सजातीय पदों में चर तथा उसकी घात समान होती है।
5. सजातीय पदों को आपस में जोड़ा या घटाया जा सकता है, उनके गुणांक जुड़ते या घटते हैं, बीजांकों की घातें वही रहती हैं।
6. एकपदी को एकपदी से गुणा करने पर हमेशा एकपदी प्राप्त होता है।
7. बहुपद को एक पदी से गुणा करने के लिये बहुपद का प्रत्येक पद एकपदी से गुणा किया जाता है।
8. दो द्विपदी के गुणा में पहले द्विपद के प्रत्येक पद को दूसरे द्विपद से गुणा करेंगे फिर वितरण नियम का उपयोग करते हुए एक पदी को द्विपद से गुणा करेंगे।
9. सर्वसमिका एक ऐसी समिका है जो चर के सभी मानों के लिये सत्य होती है।
10. निम्नलिखित मानक सर्वसमिकाएँ है:

(i) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(ii) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

(iii) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

अध्याय 10

गुणनखण्ड

10.1 गुणनखण्ड

हमने पिछली कक्षाओं में प्राकृत संख्याओं के अभाज्य गुणनखण्ड करना सीखा है।

जैसे–

$$24 = \underline{2} \times 2 \times 2 \times \underline{3}$$

$$30 = \underline{2} \times \underline{3} \times 5$$

इन अभाज्य गुणनखण्डों में हम देखते हैं कि 24 व 30 में अभाज्य संख्या 2 व 3 उभयनिष्ठ है इस प्रकार की अभाज्य संख्याओं के गुणनफल को उन संख्याओं का सार्व गुणनखण्ड कहते हैं।

उदाहरण 1 32, 56, 72 का सार्व गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

हल संख्या 32, 56, 72 के गुणनखण्ड

$$32 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times 2 \times 2$$

$$56 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times 7$$

$$72 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times 3 \times 3$$

सार्व गुणनखण्ड $= 2 \times 2 \times 2 = 8$

उदाहरण 2 25, 27 का सार्व गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

हल संख्या 25, 27 के गुणनखण्ड

$$25 = 5 \times 5$$

$$27 = 3 \times 3 \times 3$$

इनमें कोई भी अभाज्य संख्या दोनों में नहीं आ रही है अतः इनका सार्व गुणनखण्ड 1 होगा।

इसी प्रकार, हम बीजीय व्यंजकों (Algebraic Expression) को भी उनके गुणनखण्डों के गुणनफलों के रूप में व्यक्त कर सार्व गुणनखण्ड ज्ञात कर सकते हैं।

10.2 बीजीय व्यजकों के गुणनखण्ड

कक्षा VII में बीजीय व्यंजकों के पदों को पेड़ आरेख की सहायता से गुणनखण्डों के गुणनफल के रूप मे बताया।

उदाहरणार्थ, बीजीय व्यंजक $3xy + 5x$ में

$3xy$ गुणनखण्डों 3, x और y से बना है अर्थात्

$3xy = 3 \times x \times y$

$5x = 5 \times x$

इनके आगे और गुणनखण्ड नहीं किए जा सकते हैं, हम कह सकते हैं कि $3xy$ के अभाज्य गुणनखण्ड 3, x व y हैं बीजीय व्यंजक में हम 'अभाज्य' के स्थान पर शब्द 'अखण्डनीय' का प्रयोग करते हैं अतः $3xy$ के अखण्डनीय गुणनखण्ड 3, x व y हैं

इसी प्रकार–

$5x\ (x+3) = 5 \times x \times (x+3)$

$10xy\ (x+2)\ (x+9) = 2 \times 5 \times x \times y \times (x+2) \times (x+9)$

> $3xy$ का अखण्डनीय रूप $3 \times x \times y$ होता है।

10.2.1 गुणनखण्डन की विधियाँ

जब हम किसी बीजीय व्यंजक के गुणनखण्ड करते हैं तो उसे गुणनखण्डों के गुणनफल के रूप में लिखते हैं ये गुणनखण्ड संख्याएँ, बीजांक या बीजीय व्यंजक हो सकते हैं। जैसे– $5xy$, $2x^2$, $2x^2y$, $2x(y+2)$, $6(y+1)$। हम इन व्यंजकों के गुणनखण्ड इन्हें देखकर बता सकते है। इसके अलावा $6x+3$, $2a+4b$, y^2+5y, $x^2+7x+12$ जैसे व्यंजकों पर विचार करते है, इनके गुणनखण्ड क्या है ? इन व्यंजकों के गुणनखण्ड करने के लिये दो विधियाँ हैं।

जो इस प्रकार है। (1) सार्व गुणनखण्ड विधि (2) समूहन विधि

10.2.1.1 सार्व गुणनखण्ड विधि

इसे हम एक सरल उदाहरण से अच्छी तरह समझ सकते हैं

आइए $6x+9$ के गुणनखण्ड करते हैं

$6x = 2 \times 3 \times x$

$9 = 3 \times 3$

$6x+9 = (2 \times 3 \times x) + (3 \times 3)$ दोनों मे सार्व गुणनखण्ड 3 हैं। अतः

$= 3[2 \times x + 3] = 3(2x+3)$, ये $6x + 9$ का अखण्डनीय गुणनखण्ड हैं।

<u>द्विपदीय के लिए</u> $ka + kb = k\ (a+b)$

<u>त्रिपदीय के लिए</u> $ka + kb + kc = k\ (a+b+c)$

10.2.1.2 समूहन द्वारा

$3ab + 3b + 2a + 2$ पूरे पद में एक सार्व गुणनखण्ड नहीं है। अतः हम व्यंजक के पदों के समूह बनाकर उसमें से उभयनिष्ठ निकालते हैं, जैसे $3ab + 3b + 2a + 2$ में एक समूह $3ab + 3b$ तथा दूसरा समूह $2a + 2$

$= \underline{3ab + 3b} + \underline{2a + 2}$
$= 3b(a+1) + 2(a + 1)$
$= (a + 1)(3b+2)$

यहाँ पुनः $a + 1$ दोनों में उभयनिष्ठ हैं। पुनः प्रक्रिया करते हैं

आओ हम इसी बीजीय व्यंजक पर विचार करते हैं यदि यह इस प्रकार से लिखा हुआ है तो

$3ab + 2 + 3b + 2a$

इसमे दो–दो पदों के समूह बनाने पर उभयनिष्ठ पद नही मिलते हैं

इस प्रकार के बीजीय व्यंजकों को हम पुनः व्यवस्थित करके इसके समूह बनाकर गुणनखण्ड कर सकते हैं।

$3ab + 2 + 3b + 2a = 3ab + 2a + 3b + 2$
$= a(3b+2)+1(3b+2)$
$= (3b+2)(a+1)$

जब कोई उभयनिष्ठ गुणांक नहीं होता है 1 को उभयनिष्ठ लिया जाता है

$(3b + 2)$ दोनों में उभयनिष्ठ है अतः पुनः प्रक्रिया करते हैं

<u>यहाँ ध्यान दें</u>– कि $(a+1)(3b+2) = (3b+2)(a+1)$
गुणन का क्रम विनिमेयता का नियम लगता है।

इसे हम इस रूप में लिख सकते हैं
$\underline{Ka+Kb} + \underline{Pa + Pb}$
$= K(a+b) + P(a+b)$
$= (a+b)(K+P)$

उदाहरण 3 व्यंजक $6xy - 4y + 6 - 9x$ के गुणनखण्ड कीजिए।

चरण 1. जाँच कीजिए कि क्या सभी पदों में कोई उभयनिष्ठ गुणनखण्ड है यहाँ कोई उभयनिष्ठ गुणनखण्ड नहीं है।

चरण 2. दो समूह बनेंगे पहला समूह $6xy - 4y$ तथा दूसरा समूह $6 - 9x$

$6xy - 4y$	$6 - 9x$
$=2y(3x-2)$	$=3(2-3x)$

चरण 3. दोनों एक समान नहीं है अतः दूसरे समूह को व्यवस्थित करेंगे।

$6 - 9x = -9x + 6$
$= -3(3x - 2)$

एक साथ करने पर

$6xy - 4y + 6 - 9x$
$= \underline{6xy - 4y} - \underline{9x + 6}$ (व्यवस्थित करने पर)
$= 2y(3x-2) - 3(3x-2)$
$= (3x-2)(2y-3)$

प्रश्नावली 10.1

1. दिए हुए पदों मे सार्व गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए–

(i) $12x$, 36 (ii) $14pq$, $28p^2q^2$ (iii) 6abc, $24ab^2$, $12a^2b$

(iv) $16x^3$, $-4x^2$, $32x$ (v) $10pq$, $20qr$, $30rp$ (vi) $3x^2y^3$, $10x^3y^2$, $6x^2y^2z$

2. निम्नलिखित व्यंजकों के गुणनखण्ड कीजिए – (सार्व गुणनखण्ड द्वारा)

(i) $6p - 12q$ (ii) $7a^2 + 14a$ (iii) $10a^2 - 15b^2 + 20c^2$

(iv) $ax^2y + bxy^2 + cxyz$ (v) $x^2yz + xy^2z + xyz^2$ (vi) $-16z + 20z^3$

3. गुणनखण्ड कीजिए (समूहन द्वारा)

(i) $2xy + 3 + 2y + 3x$ (ii) $z - 7 - 7xy + xyz$

(iii) $6xy - 4y + 6 - 9x$ (iv) $15pq + 15 + 9q + 25p$

10.3 समिकाओं के प्रयोग द्वारा गुणनखण्ड

हम इन सर्वसमिकाओं को जानते हैं

(i) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (ii) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (iii) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

इन सर्वसमिकाओं का उपयोग हम व्यंजकों के गुणनखण्ड करने के लिए भी करते हैं। इनकी सहायता से तीन पद वाले बहुत से व्यंजकों के गुणनखण्ड आसानी से कर सकते हैं।

उदाहरण 4 निम्नलिखित के गुणनखण्ड कीजिए।

(1) $x^2 + 6x + 9$

$a^2 + 2ab + b^2$ के रूप में बनाने पर

$= x^2 + 2 \times x \times 3 + (3)^2$

$= (a)^2 + 2\text{x}(a)(b) + (b)^2$

$= (x+3)^2$

ध्यान दें

(i) तीन पद हैं

(ii) यह $a^2 + 2ab + b^2$ के रूप का है जहाँ a^2 के स्थान पर x^2 तथा b^2 के स्थान पर 9 है

अतः $a = x$, $b = 3$

समूहन विधि

$x^2 + 6x + 9$

$= \underline{x^2 + 3x} + \underline{3x + 9}$

$= x(x+3) + 3(x+3)$

$= (x+3)(x+3)$

$= (x+3)^2$

(2) $9a^2 - 30ab + 25b^2$

$= (3a)^2 - 2 \times 3a \times 5b + (5b)^2$

$= (a)^2 - 2 \times (a) \times (b) + (b)^2$

$= (3a-5b)^2$

ध्यान दें

(i) तीन पद हैं

(ii) यह $a^2 - 2ab + b^2$ के रूप का हैं जहाँ a^2 के स्थान पर $9a^2$ तथा b^2 के स्थान पर $25b^2$ है। अतः $a = 3a$, $b = 5b$

समूहन विधि $9a^2 - 30ab + 25b^2$

$= 9a^2 - 15ab - 15ab + 25b^2$

$= 3a(3a-5b) - 5b(3a-5b)$

$= (3a-5b)(3a-5b)$

$= (3a-5b)^2$

(3) $4x^2 - 9a^2$
$= (2x)^2 - (3a)^2$
$= (2x+3a)(2x-3a)$

(i) इसमें सर्वसमिका $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ का प्रयोग होगा क्योंकि इसमे दोनों पद पूर्ण वर्ग है
यहाँ $a^2 = 4x^2$, $b^2 = 9a^2$
$a = 2x$, $b = 3a$

(4) $2x^2 + 16x + 32$
$= 2[x^2 + 8x + 16]$
$= 2[x^2 + 2x \times 4 + (4)^2]$
$= 2(x+4)^2$

(i) इसमें प्रथम व अन्तिम पद पूर्ण नहीं है
(ii) तीनो पदों मे 2 उभयनिष्ठ है
iii) यह $a^2 + 2ab + b^2$ के रूप का है

10.3.1 $(x+a)(x+b)$ के रूप के गुणनखण्ड

हम एक चर वाले व्यंजकों, जैसे $x^2 + 8x + 12$, $y^2 - 5y + 6$, $z^2 - 4z - 12$, $x^2 + 2x - 15$ इत्यादि व्यंजकों के गुणनखण्ड किस प्रकार कर सकते हैं ?ये व्यंजक $(a+b)^2 (a-b)^2$ के प्रकार के नहीं हैं अर्थात इनमें तीसरा पद पूर्ण वर्ग नहीं है और ये (a^2-b^2) के प्रकार के भी नहीं हैं।

परन्तु ये $x^2 + (a+b)x + ab$ प्रकार के हैं इस प्रकार के गुणखण्ड करने के लिए हम

$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$ सर्वसमिका का प्रयोग कर सकते हैं इसके लिए हमें x का गुणांक तथा अचर पद को देखते हैं। आइए उदाहरण द्वारा देखते हैं कि ऐसा किस प्रकार किया जाता है।

करो और सीखो

दो पूर्णांक a तथा b ऐसे ज्ञात कीजिए कि –

$a+b$	ab	a	b
8	15	5	3
13	12		
-1	-20	-5	4
-5	4		
10	21		
-1	-12		
-11	10		
-7	10		

तालिका–2

उदाहरण 5 निम्नलिखित के गुणनखण्ड कीजिए।

(i) $x^2 + 8x + 12$

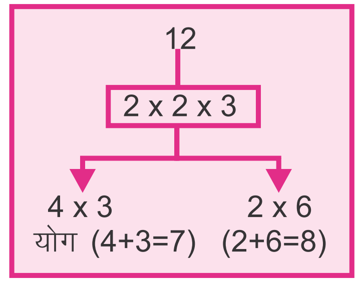
सर्वसमिका $x^2 + (a+b)x + ab$ से तुलना करने पर

$a+b=8 \qquad ab = 12$

a और b को ज्ञात करने के लिए, $ab=12$, में 12 के ऐसे गुणनखण्डों का चयन करना होगा जिनका योग 8 होता है

अतः हम $a=2$ तथा $b=6$ लेंगे

अतः $x^2 + 8x + 12 = (x+2)(x+6)$



(ii) $y^2 - 5y + 6$

तुलना करने पर

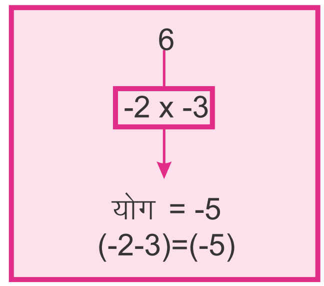
$a+b= -5 \qquad ab = 6$

$y^2 - (2+3)y + 6$

$= \underline{y^2 - 2y} \underline{-3y + 6}$ समूहन करने पर

$= y(y-2) - 3(y-2)$

$= (y-2)(y-3)$



(iii) $z^2 - 4z - 12$

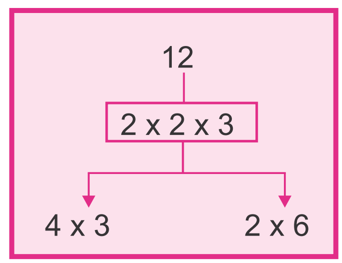
$a+b = -4 \qquad ab= -12$

$ab= -12$ का अर्थ है a या b में दोनों में एक ऋणात्मक है, $a+b= -4$ का अर्थ है बड़ा संख्यात्मक मान ऋणात्मक है अतः $a= -6$ व $b=2$ लेने पर –

$z^2 - 4z - 12 = z^2 - 6z + 2z - 12$

$= z(z-6) + 2(z-6)$

$= (z-6)(z+2)$



उदाहरण 6 $x^2 + 2x - 15$ के गुणनखण्ड कीजिए।

हल $x^2 + 2x - 15$

$a + b = 2 \quad ab = -15$ (तुलना करने पर)

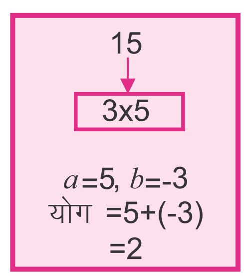
$ab = -15$ का अर्थ है a अथवा b में से एक ऋणात्मक है $a + b = 2$

a का मान धनात्मक होना चाहिए और b ऋणात्मक होना चाहिए

$x^2 + 2x - 15 = \underline{x^2 + 5x} - \underline{3x - 15}$

$= x(x+5) - 3(x+5)$

$= (x+5)(x-3)$



प्रश्नावली 10.2

(1) निम्नलिखित के गुणनखण्ड कीजिए।

(i) a^2-4 (ii) a^2-49b^2 (iii) a^3-121p (iv) $(a-b)^2-c^2$
(v) a^4-b^4 (vi) $5x^3-125x$ (vii) $63a^2-112b^2$ (viii) $9x^2y^2-16$
(ix) $(l+m)^2-(l-m)^2$

(2) निम्नलिखित के गुणनखण्ड कीजिए।

(i) lx^2+mx (ii) $2x^3+2xy^2+2xz^2$
(iii) $a(a+b)+4(a+b)$ (iv) $(xy+y)+x+1$
(v) $5a^2-15a-6c+2ac$ (vi) $am^2+bm^2+bn^2+an^2$

(3) निम्नलिखित व्यंजकों के गुणनखण्ड कीजिए।

(i) x^2+5x+6 (ii) $q^2+11q+24$
(iii) $m^2-10m+21$ (iv) $x^2+6a-16$
(v) $x^2-7x-18$ (vi) $k^2-11k-102$
(vii) $y^2+2y-48$ (viii) $d^2-4d-45$
(ix) $m^2+16m+63$ (x) $n^2-19n-92$
(xi) $p^2-10p+16$ (xii) $x^2+4x-45$

10.4 बीजीय व्यंजकों का विभाजन

हम बीजीय व्यंजकों को जोड़ना, घटाना तथा गुणा करना सीख चुके हैं परन्तु हम एक बीजीय व्यंजक से दूसरे का विभाजन करना अब सीखेंगे। विभाजन हमेशा गुणन की प्रतिलोम संक्रिया है।

जैसे – $5 \times 8 = 40$ से $40 \div 8 = 5$ या $40 \div 5 = 8$

इसी प्रकार $3x \times 5x^2 = 15x^3$

$15x^3 \div 5x^2 = 3x$

$15x^3 \div 3x = 5x^2$

इसी प्रकार $5x(x+3) = 5x^2+15x$

$(5x^2+15x) \div 5x = x+3$

$(5x^2+15x) \div (x+3) = 5x$

10.4.1 एक पदी का एक अन्य एक पदी से विभाजन

$$8x^3 \div 2x = \frac{2 \times 2 \times 2 \times x \times x \times x}{2 \times x} = 2 \times 2 \times x \times x = 4x^2$$

उदाहरण 7

(i) $-20x^5 \div 5x^2$ हल कीजिए।

हल $= \dfrac{-2 \times 2 \times 5 \times x \times x \times x \times x \times x}{5 \times x \times x} = -2 \times 2 \times x \times x \times x = -4x^3$

(ii) $7a^2b^2c^2 \div 21abc$

हल $= \dfrac{7 \times a \times a \times b \times b \times c \times c}{3 \times 7 \times a \times b \times c}$

$= \dfrac{a \times b \times c}{3} = \dfrac{abc}{3}$

(iii) $63p^2q^3r \div -3p^4q$

हल $= \dfrac{3 \times 3 \times 7 \times p \times p \times q \times q \times q \times r}{-3 \times p \times p \times p \times p \times q}$

$= \dfrac{3 \times 7 \times q \times q \times r}{-p \times p} = \dfrac{-21q^2r}{p^2}$

10.4.2 एक बहुपद में एक पदीय व्यंजक से भाग

$8y^3 + 6y^2 + 12y$ को $2y$ से विभाजन पर विचार करते हैं

$\dfrac{8y^3 + 6y^2 + 12y}{2y} \quad \dfrac{2y\,(4y^2 + 3y + 6)}{2y}$

$= 4y^2 + 3y + 6$

इसे इस प्रकार भी कर सकते हैं

$\dfrac{8y^3 + 6y^2 + 12y}{2y} = \dfrac{8y^3}{2y} + \dfrac{6y^2}{2y} + \dfrac{12y}{2y}$

$= 4y^2 + 3y + 6$

अंश के प्रत्येक पद को हर में एक पदी से भाग देते हैं।

उदाहरण 8 $(18x + 12x^3 - 6x^2) \div (-3x)$ को हल कीजिए।

हल $\dfrac{18x + 12x^3 - 6x^2}{-3x} = \dfrac{6x\,(3 + 2x^2 - x)}{-3x}$

$= -2(3 + 2x^2 - x)$

$= -6 - 4x^2 + 2x$

$= -4x^2 + 2x - 6$

10.4.3 बहुपद का बहुपद से विभाजन

$(7x^2 + 14x) \div (x+2)$ पर विचार करते हैं।

$\dfrac{7x^2 + 14x}{x+2}$

$= \dfrac{7x\,(x+2)}{x+2} = 7x$

उदाहरण 9 $(x^2 + 7x + 10) \div (x+2)$ को हल कीजिए।

हल

$$\frac{x^2 + 7x + 10}{x + 2} = \frac{x^2 + 5x + 2x + 10}{x + 2}$$

$$= \frac{x(x+5) + 2\,(x+5)}{x + 2} = \frac{(x+5)\,(x+2)}{x + 2} = x + 5$$

10

5 2

जोड़ने पर 5+2 = 7

उदाहरण 10 $p(5p^2 - 80)$ को $5p(p-4)$ से भाग दीजिए।

हल

$$\frac{p(5p^2 - 80)}{5p\,(p - 4)} = \frac{5p\,(p^2 - 16)}{5p\,(p - 4)}$$

$$\frac{5p[(p)^2 - (4)^2]}{5p\,(p - 4)} = \frac{5p\,(p - 4)\,(p + 4)}{5p\,(p - 4)} = p + 4$$

करो और सीखो

त्रुटियों को पहचानो

(1) $3x + x + 4x = 56$

$7x = 56$

$x = \frac{56}{7} = 8$

त्रुटि कहाँ है सही उत्तर ज्ञात कीजिए।

(2) $5x$ का मान $x = -2$ पर ज्ञात कीजिए।

$= 5 - 2 \quad = 3$

त्रुटि कहाँ है ? सही मान ज्ञात कीजिए।

किसी पद के गुणांक 1 को प्रायः दर्शाया नहीं जाता है परन्तु समान पदों को जोड़ते समय इसे योग में सम्मिलित करते है।

(3) व्यंजकों के हल कॉलम A तथा कॉलम B में दिए गए हैं जाँच करके बताएँ कौनसा हल सही है ?

व्यंजक	A	B
$3(x-4)$	$3x - 4$	$3x - 12$
$(2x)^2$	$2x^2$	$4x^2$
$(x+4)^2$	$x^2 + 16$	$x^2 + 8x + 16$
$(x-3)^2$	$x^2 - 9$	$x^2 - 6x + 9$
$\frac{y+5}{5}$	$y + 1$	$\frac{y}{5} + 1$

प्रश्नावली 10.3

1. निम्नलिखित विभाजन कीजिए।

(i) $28x^4 \div 56x$ (ii) $-36y^3 \div 9y^2$

(iii) $34x^3y^3z^3 \div 51xy^2z^3$ (iv) $12a^8b^8 \div (-6a^6b^4)$

2. दिए हुए बहुपद को दिए हुए एक पदी से भाग दीजिए।

(i) $(5x^2 - 6x) \div 3x$ (ii) $(x^3 + 2x^2 + 3x) \div 2x$

(iii) $(p^3q^6 - p^6q^3) \div p^3q^3$ (iv) $(3x^8 - 4x^6 + 5x^4) \div x^4$

3. निम्नलिखित विभाजन कीजिए।

(i) $10y(6y + 21) \div 5(2y + 7)$ (ii) $9x^2y^2(3z - 24) \div 27xy(z - 8)$

(iii) $(10y + 14) \div 2$ (iv) $(6x - 15) \div (2x - 5)$

4. व्यंजक के गुणनखण्ड कीजिए और भाग दीजिए।

(i) $(y^2 + 7y + 10) \div (y + 5)$ (ii) $(5x^2 - 25x + 20) \div (x - 1)$

(iii) $12xy(9x^2 - 16y^2) \div 4xy(3x + 4y)$ (iv) $4yz(z^2 + 6z - 16) \div 2y(z+8)$

हमने सीखा

1. गुणनखण्ड किसी व्यंजक को उसके गुणजों के गुणा के रूप में व्यक्त करने की प्रक्रिया है।
2. अभाज्य गुणनखण्ड वह होता है जिसे आगे और गुणनखण्डों में नहीं बाँटा जा सकता है।
3. निम्नांकित प्रकार के व्यंजकों को गुणनखंडों के रूप में व्यक्त किया जा सकता है–
   (i) $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
   (ii) $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
   (iii) $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
   (iv) $x^2 + (a+b)x + ab = (x + a)(x + b)$
4. यदि व्यंजक $x^2 + (a+b)x + ab$ रूप में है तो इसका गुणनखंड $(x+a)(x+b)$ होगा।
5. गुणा, भाग का व्युत्क्रम होता है। यह संकल्पना बीजगणितीय व्यंजकों पर भी लागू होती है।
6. इस अध्याय में पढ़े बीजीय व्यंजकों के विभाजनों की स्थिति से हमें भाज्य = भाजक x भागफल प्राप्त होगा परन्तु व्यापक रूप में वह संबंध निम्नलिखित है–
   भाज्य = भाजक x भागफल + शेषफल

अध्याय 11

एक चर राशि वाले रैखिक समीकरण

11.1 आपने पिछली कक्षाओं में बीजीय व्यंजकों एवं समीकरणों के बारे में पढ़ा है। नीचे कुछ व्यंजक व समीकरण दिए गए हैं।

(i) $2x + 5$ (ii) $x + y = 0$ (iii) $3xy = 5z$ (iv) $10x^2y$

इसमें से कौन कौन से समीकरण हैं ?

आपको याद होगा कि समीकरणों में सदैव "=" चिह्न का प्रयोग होता है।

हम इस अध्याय में एक चर वाले रैखिक समीकरणों का अध्ययन करेंगे अर्थात् जिन समीकरणों में एक ही चर हो तथा चर की अधिकतम घात भी एक ही हो जैसे –

$x + 2 = 7, \; 2x - 3 = 0$

पिछली कक्षा में हमने ऐसे सरल समीकरणों को हल करना सीखा जिसमें चर राशि एक ही पक्ष में थी। साथ ही हमने परिमेय गुणांकों वाले समीकरण को भी हल करना सीखा। जैसे –

$$5x - 4 = 26$$

और

$$\frac{2x}{3} - \frac{x}{2} = 30$$

आओ एक समीकरण के साथ कुछ अभ्यास करके उसके हल को देखें–

समीकरण $3x + 9 = 15$ हल $x = 2$

क्र.सं.	दोनों पक्षों	नया समीकरण	हल
1	में 2 जोड़ने पर	$3x + 11 = 17$	$x = 2$
2	में से 3 घटाने पर	$3x + 6 = 12$	$x =$ ....
3	को 2 से गुणा करने पर	$6x + 18 =$ ...	$x =$ ....
4	में 3 से भाग देने पर	............$= 5$	$x =$ ....

इस प्रकार समीकरण के दोनों पक्षों में समान संख्या जोड़ने, घटाने, शून्येतर संख्या से गुणा करने या भाग लगाने पर समीकरण का स्वरूप बदल जाता है लेकिन उसके हल (उत्तर) में कोई अन्तर नहीं आता है। अतः समीकरण हल करने में हम आवश्यकतानुसार इन संक्रियाओं का सहारा लेते हैं।

अब हम ऐसे सरल समीकरण हल करना सीखेंगे, जिनके दोनों पक्षों में चर राशि हो सकती है।

समीकरण $8x - 13 = 5x - 7$ को हल करने का अर्थ है उसका स्वरूप $x =$ .... बनाना।

अतः LHS में इकाई चर राशि लानी है और RHS में अचर राशि रखनी है इसके लिए दोनों पक्षों में समान संक्रिया या पक्षान्तरण करेंगे।

उदाहरण 1 समीकरण $8x - 13 = 5x - 7$ को हल कीजिए।

हल 1 (तुला विधि) –

$8x - 13 + 13 = 5x - 7 + 13$ [दोनों पक्षों में 13 जोड़ने पर]

या $8x = 5x + 6$

या $8x - 5x = 5x - 5x + 6$ [दोनों पक्षों 5x घटाने पर]

या $3x = 6$

या $\frac{3x}{3} = \frac{6}{3}$ [दोनों पक्षों में 3 का भाग देने पर]

या $x = 2$

हल 2 (पक्षान्तर विधि) –

$8x - 13 = 5x - 7$

या $8x - 5x = -7 + 13$ [5x और - 13 का पक्षान्तर करने पर]

या $3x = 6$

$x = \frac{6}{3}$ [गुणांक 3 का पक्षान्तर क्रिया]

या $x = 2$

चूंकि पक्षान्तर विधि तुलाविधि का ही संक्षिप्त और सरलरूप है अतः आगे हम पक्षान्तर विधि का ही प्रयोग करेंगे।

उदाहरण 2 समीकरण $\frac{x}{5} = \frac{7-6x}{3}$ हल कीजिए।

हल $\frac{x}{5} = \frac{7-6x}{3}$

या $3x = 35 - 30x$ [ल.स. 15 से दोनों को गुणा करने पर या वज्र गुणन करने पर]

या $3x + 30x = 35$

या $33x = 35$

या $x = \frac{35}{33}$

उदाहरण 3 समीकरण $\frac{6x+1}{3} + 1 = \frac{x-3}{6}$ हल कीजिए।

हल $\frac{6x+1}{3} + 1 = \frac{x-3}{6}$

या $\frac{6x+1+3}{3} = \frac{x-3}{6}$

या $\frac{6x+4}{3} = \frac{x-3}{6}$

या $\frac{6x+4}{3} \times 6 = \frac{x-3}{6} \times 6$ [ल.स. 6 से दोनों पक्षों का गुणा करने पर]

या $12x + 8 = x - 3$

या $12x - x = -3 - 8$

या $11x = -11$

या $x = \frac{-11}{11}$

या

$x = -1$

उदाहरण 4 समीकरण $\frac{x+1}{2} + \frac{x+2}{3} = \frac{x+3}{4} + \frac{x+4}{5}$ हल कीजिए।

हल $\frac{x+1}{2} + \frac{x+2}{3} = \frac{x+3}{4} + \frac{x+4}{5}$

2, 3, 4 और 5 के ल. स. 60 से दोनों पक्षों को गुणा करने पर–

$$60 \times \frac{x+1}{2} + 60 \times \frac{x+2}{3} = 60 \times \frac{x+3}{4} + 60 \times \frac{x+4}{5}$$

या $30(x + 1) + 20(x + 2) = 15(x + 3) + 12(x + 4)$

या $30x + 30 + 20x + 40 = 15x + 45 + 12x + 48$

या $30x + 20x - 15x - 12x = 45 + 48 - 30 - 40$

या $50x - 27x = 93 - 70$

या $23x = 23$

या $x = \frac{23}{23}$

या $x = 1$

यदि गुणांक या संख्याएँ दशमलव व भिन्न के रूप में हों तो उन्हें सरल भिन्न में बदलकर लघुत्तम से गुणा करके हल करते हैं।

उदाहरण 5 समीकरण $0.5m + 1.5 = 0.25m - 1.5$ हल कीजिए।

हल $0.5m + 1.5 = 0.25m - 1.5$

या $\frac{5}{10}m + \frac{15}{10} = \frac{25}{100}m - \frac{15}{10}$ [दशमलव भिन्न को सरल भिन्न में बदलने पर]

या $50m + 150 = 25\,m - 150$ [100 से गुणा करने पर क्योंकि 10 और 100 का ल.स. 100 होता है]

या $50m - 25m = -150 - 150$

या $25m = -300$

या $m = \frac{-300}{25}$

या $m = -12$

यदि किसी भिन्न के अंश और हर में चर राशि हो तो वहाँ वज्र (तिर्यक) गुणन या उनके पक्षान्तर से सरल समीकरण में बदल कर हल किया जाता है।

उदाहरण 6 समीकरण $\frac{(2x + 5)}{(3x + 1)} = \frac{3}{11}$ हल कीजिए।

हल वज्र (तिर्यक) गुणन द्वारा

$11(2x + 5) = 3(3x + 1)$

या $22x + 55 = 9x + 3$

या $22x - 9x = 3 - 55$

या $13x = -52$

या $x = \frac{-52}{13}$

या $x = -4$

करो और सीखो

निम्न समीकरण हल कीजिए।

1. $\frac{2x}{x + 6} = 1$ 2. $10 = x + 3$ 3. $16 = 7x - 9$ 4. $\frac{x + 5}{x} = 2\frac{2}{3}$

प्रश्नावली 11.1

निम्नलिखित समीकरण हल कीजिए।

1. $6x + 3 = 4x + 11$
2. $3(x + 5) = 4x + 9$
3. $3x + 2(x + 3) = 21$
4. $\frac{x + 1}{2} + \frac{x + 2}{3} = \frac{2x - 5}{7} + 9$
5. $\frac{3x - 2}{5} = 4 - \left(\frac{x + 2}{3}\right)$
6. $\frac{x + 2}{2} + \frac{x + 4}{3} = \frac{x + 6}{4} + \frac{x + 8}{5}$

7. $0.6x + 0.25x = 0.45x + 1.2$

8. $2.5x - 7 = 0.5x + 13$

9. $\frac{7x + 4}{x + 2} = \frac{-4}{3}$

10. $\frac{4x + 8}{5x + 8} = \frac{5}{6}$

11.2 इबारती प्रश्नों का हल

आइए गणितीय वाक्य बनाने का दोहरान करें कोई संख्या x हैं तो रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए।

संख्या से 5 अधिक	=	$x + 5$
संख्या से 3 कम	=	....
संख्या का आधा	=	....
संख्या के आधे से 7 कम	=	....
संख्या के तिहाई से 4 अधिक	=	....
संख्या के तीन गुने से 6 अधिक	=	....
संख्या के 5 गुने से 3 कम	=	....

दैनिक जीवन की कई समस्याओं, पहेलियों आदि का समाधान हम समीकरण द्वारा प्राप्त कर सकते हैं। इसके लिए निम्नलिखित चरणों में कार्य किया जाता है–

1. दी गई समस्या को ध्यान से पढ़ें इसमें ज्ञात तथा अज्ञात राशि पता करें।
2. अब अज्ञात राशि को चर राशि x के रूप में लिखें।
3. समस्त कथनों को गणितीय कथन (बीजीय पद एवं व्यंजक) के रूप में लिखें।
4. प्रश्न की शर्त के अनुसार जो राशियाँ बराबर हों उन्हें समीकरण के रूप में लिखें।
5. समीकरण को हल करके चर का मान ज्ञात करें।
6. उत्तर की जाँच प्रश्न की शर्ते जाँच कर करें।

उदाहरण 7 दो संख्याओं का योग 60 है। छोटी संख्या का तीन गुना बड़ी संख्या के दुगुने के बराबर है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल माना कि छोटी संख्या $= x$

प्रश्नानुसार बड़ी संख्या $= 60 - x$

छोटी संख्या का तीन गुना $= 3x$

बड़ी संख्या का दुगुना $= 2(60 - x)$

प्रश्न की शर्त के अनुसार –

$$3x = 2(60 - x)$$

या $$3x = 120 - 2x$$

या $3x + 2x = 120$

या $5x = 120$

या $x = \frac{120}{5}$

या $x = 24$

दूसरी संख्या = $60 - x = 60 - 24 = 36$ उत्तर 24, 36

> दो अंकों की संख्याएँ बनाने के लिए निम्न सूत्र का उपयोग करे–
> संख्या = 10 x दहाई का अंक + इकाई का अंक

उदाहरण 8 एक संख्या में इकाई का अंक दहाई के अंक से 3 कम है। संख्या उसके अंकों के योग के 7 गुने से 3 अधिक है। संख्या ज्ञात करो।

हल माना कि दहाई का अंक = x

तो इकाई का अंक = $x - 3$

संख्या = 10 x दहाई का अंक + इकाई का अंक

$= 10 \times x + x - 3$

$= 11x - 3$

अंको का योग = $(x + x - 3)$

प्रश्न की शर्त के अनुसार –

$11x - 3 = 7(x + x - 3) + 3$

या $11x - 3 = 7x + 7x - 21 + 3$

या $11x - 7x - 7x = -21 + 3 + 3$

$-3x = -15$

$x = \frac{-15}{-3}$

$x = 5$

अतः अभीष्ट संख्या

$= 11x - 3$

$= 11 \times 5 - 3$

$= 55 - 3$

$= 52$

उदाहरण 9 रमेश के पिता की आयु रमेश से 27 वर्ष अधिक है। 5 वर्ष बाद रमेश की आयु और उसके पिता की आयु का अनुपात 2 : 3 हो जाएगा। दोनों की वर्तमान आयु बताओ।

हल माना कि रमेश की आयु $= x$ वर्ष

तो पिता की आयु $= (x + 27)$ वर्ष

5 वर्ष बाद रमेश की आयु = $(x + 5)$ वर्ष

5 वर्ष बाद पिता की आयु = $x + 27 + 5 = x + 32$ वर्ष

प्रश्न की शर्त के अनुसार –

$$\frac{\text{5 वर्ष बाद रमेश की आयु}}{\text{5 वर्ष बाद पिता की आयु}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{x + 5}{x + 32} = \frac{2}{3}$$

या $3(x + 5) = 2(x + 32)$

या $3x + 15 = 2x + 64$

या $3x - 2x = 64 - 15$

या $x = 49$

रमेश की आयु $x = 49$ वर्ष

पिता की आयु $x + 27 = 49 + 27 = 76$ वर्ष

उदाहरण 10 एक परिमेय संख्या का हर उसके अंश से 8 अधिक है। यदि अंश में 17 जोड़ दिया जाए तथा हर में से 1 घटा दिया जाए तो हमें $\frac{3}{2}$ प्राप्त होता है वह परिमेय संख्या ज्ञात कीजिए।

हल माना परिमेय संख्या का अंश 'x' है

प्रश्न के अनुसार हर का मान $x + 8$ होगा

अतः परिमेय संख्या होगी $= \frac{x}{x + 8}$

अब अंश में 17 जोड़ने तथा हर मे से 1 घटाने पर

$$\frac{x + 17}{x + 8 - 1} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{x + 17}{x + 7} = \frac{3}{2}$$

या $2(x + 17) = 3(x + 7)$

या $2x + 34 = 3x + 21$

या $3x - 2x = 34 - 21$

या $x = 13$

अतः अंश = 13 तथा हर = 13 + 8 = 21

अभीष्ट परिमेय संख्या $= \frac{13}{21}$

प्रश्नावली 11.2

1. एक परिमेय संख्या का अंश उसके हर से 3 कम है। यदि अंश और हर में पाँच–पाँच जोड़ दिया जाए तो उसका मान $\frac{3}{4}$ हो जाता है। संख्या बताइए।
2. भिन्न $\frac{5}{13}$ के अंश और हर में क्या जोड़ें कि भिन्न का मान $\frac{3}{5}$ हो जाए ?
3. भिन्न $\frac{15}{19}$ के अंश और हर में से क्या घटाएँ कि भिन्न का मान $\frac{5}{7}$ हो जाए ?
4. रमेश ने अपने धन का आधा पत्नी को, एक तिहाई अपने पुत्र को और शेष 50,000 रू. अपनी पुत्री को दे दिया तो उसका कुल धन ज्ञात कीजिए।
5. किसी संख्या का पाँच गुना उसके दुगुने से 48 अधिक है। संख्या बताइए।
6. 45 को ऐसे दो भागों में बाँटिए कि एक भाग दूसरे भाग के तीन गुने से 7 कम है।
7. रानू की आयु सुजल की आयु से तीन गुनी है। 4 वर्ष बाद दोनों की आयु का योग 40 वर्ष हो जाएगा दोनों की वर्तमान आयु बताइए।
8. एक आयत की लम्बाई, चौड़ाई से 6 मीटर अधिक है। यदि उसका परिमाप 64 मीटर है तो लम्बाई और चौड़ाई ज्ञात कीजिए।
9. दो अंको की एक संख्या के अंको का योग 12 है। अंक पलटने पर नई संख्या मूल संख्या से 54 अधिक हो जाती है। मूल संख्या ज्ञात कीजिए।
10. दो अंको की एक संख्या में एक अंक दूसरे अंक से चार गुना है। अंक पलटने पर बनी संख्या को इसमें जोड़ने पर 110 प्राप्त होता है। संख्या बताइए।

हमने सीखा

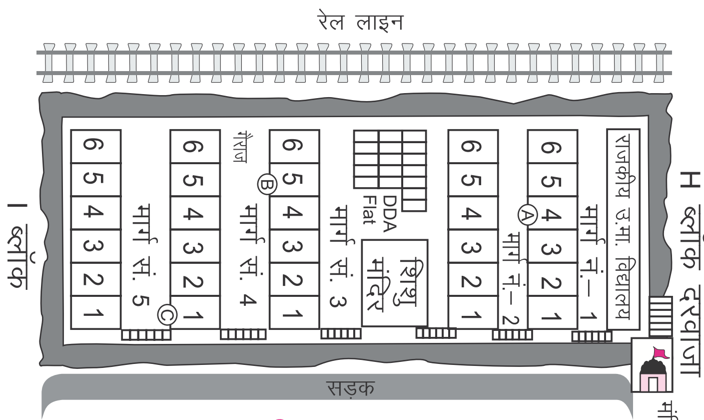
1. यदि समीकरण की घात एक हो तो इसे रैखिक समीकरण कहते हैं।
2. यदि रैखिक समीकरण में केवल एक चर हो तो इसे एक चर राशि वाले रैखिक समीकरण कहते हैं।
3. वह मान जो समीकरण में चर के लिए प्रतिस्थापन करने पर बायाँ पक्ष (L.H.S) = दायाँ पक्ष (R.H.S) हो, उसे समीकरण का हल अथवा मूल कहते हैं।
4. समीकरण में संख्याओं के जैसे ही चर भी एक पक्ष से दूसरे पक्ष में पक्षान्तर किए जा सकते हैं।

अध्याय 12

रैखिक आलेख

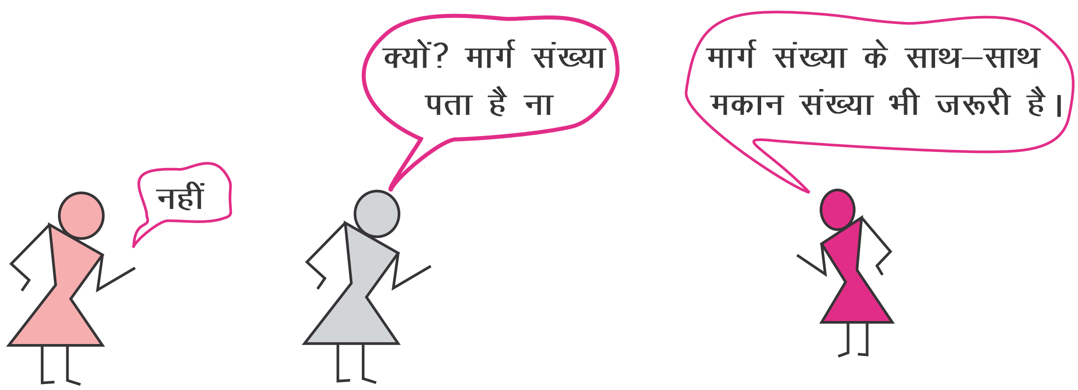
12.1 आप पिछली कक्षाओं में संख्या रेखा के बारे में अध्ययन कर चुके हैं। संख्या रेखा पर एक बिन्दु अथवा अन्य बिन्दु की स्थिति का निर्धारण तथा उस बिन्दु की स्थिति की व्याख्या की जाती है परन्तु हमारे दैनिक जीवन में ऐसी कई स्थितियाँ आती है, जब हमें किसी बिन्दु की स्थिति निश्चित करने के लिए एक से अधिक रेखाओं के संदर्भ में उसकी स्थिति की व्याख्या करनी पड़ती है।

गतिविधि 1 निम्न स्थितियों पर विचार कीजिए।



चित्र 12.1

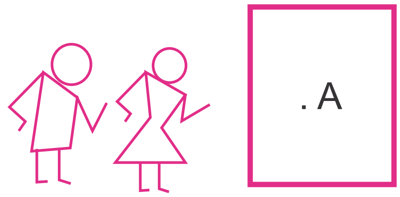
चित्र 12.1 में एक कॉलोनी का नक्शा दिया गया है जिसमें प्रत्येक मार्ग पर 6-6 मकान बने हैं। आपके रिश्तेदार इस कॉलोनी में रहते हैं। आपको बताया गया कि वे मार्ग संख्या 2 पर रहते हैं। क्या आप उनके घर का पता सरलता से बता सकते हैं ?



चित्र में A उस मकान को दर्शाता है जो मार्ग संख्या 1 पर है और उसकी संख्या 4 है। इसी प्रकार B उस मकान को दर्शाता है जो मार्ग संख्या 3 पर है उसकी संख्या 5 है। अतः किसी स्थान की सही स्थिति पता लगाने के लिए दो स्वतन्त्र सूचनाओं की आवश्यकता होती है।

गतिविधि 2

रीता और श्याम साथ में खड़े हैं। रीता ने एक कागज लिया और उस पर एक बिन्दु A अंकित किया और श्याम से पूछा कि बिन्दु A की स्थिति बताओ।



चित्र 12.2

श्याम – यह कागज के ऊपर की ओर बाईं तरफ स्थित है।

रीटा – इससे तो बिन्दु A की स्थिति स्पष्ट नहीं होती है। इसके लिए यह भी बताना होगा कि बाईं ओर से कितनी दूर व नीचे से कितना ऊपर स्थित है।

श्याम – (स्केल से नापते हुए) अच्छा बाईं ओर से 2 सेमी व नीचे से 8 सेमी ऊपर स्थित है।

रीटा – हाँ अब बिन्दु की स्थिति सही पता लग पाएगी।

अध्यापक – इसके लिए हम दो नियत रेखाओं अर्थात् कागज की बाईं कोर और कागज की सबसे नीचे वाली रेखा से बिन्दु की स्थिति नियत करते हैं।

गतिविधि 3

दिए गए चित्र में एक खेल के मैदान में व्यायाम प्रदर्शन के लिए चयनित 30 विद्यार्थियों की अपने नियत स्थान पर खड़े होने की स्थिति दिखाई गई है। इन विद्यार्थियों की स्थिति का ठीक–ठीक निर्धारण निम्नलिखित तीन सूचनाओं की सहायता से किया जा सकता है–

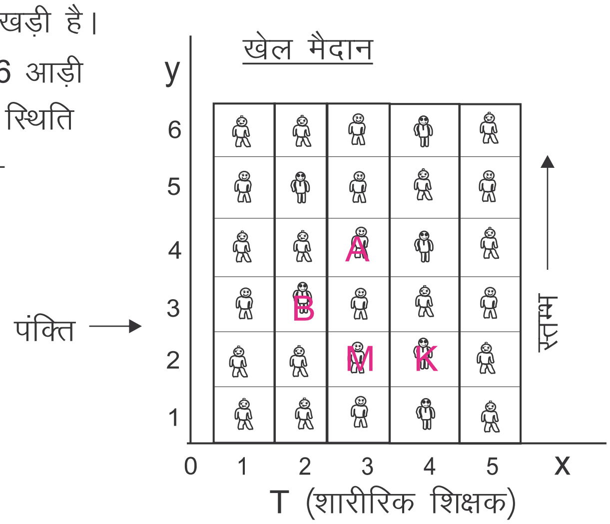
(i) शारीरिक शिक्षक की स्थिति T

(ii) वह उर्ध्वाधर स्तम्भ जिसमें वह खड़ा/खड़ी है।

(iii) वह क्षैतिज पंक्ति जिसमें वह खड़ा/खड़ी है।

शारीरिक शिक्षक के सामने 5 खड़े स्तम्भ एवं 6 आड़ी पंक्तियाँ हैं और उसे विद्यार्थी A, B, M, K की स्थिति बतानी है तो वो इन्हें इस प्रकार व्यक्त करेगा–

A → 3, 4
B → 2, 3
M → 3, 2
K → 4, 2



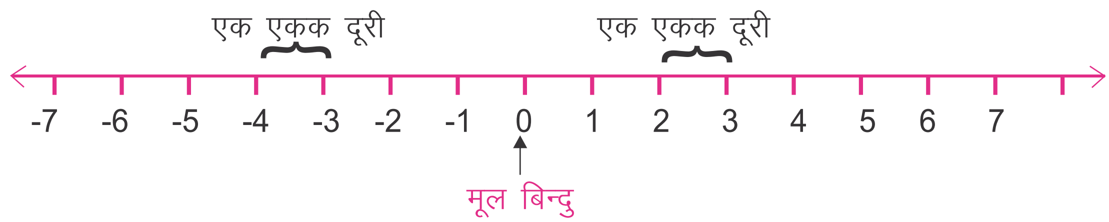
आकृति 12.3

यहाँ यह ध्यान देना आवश्यक है कि पहली संख्या स्तम्भ को व दूसरी संख्या पंक्ति को प्रदर्शित करती है। विद्यार्थी A की स्थिति को ध्यान से देखें वह तीसरे स्तम्भ और चौथी पंक्ति में खड़ा है इसी तरह B, M व K की स्थिति को भी ध्यान से देखें।

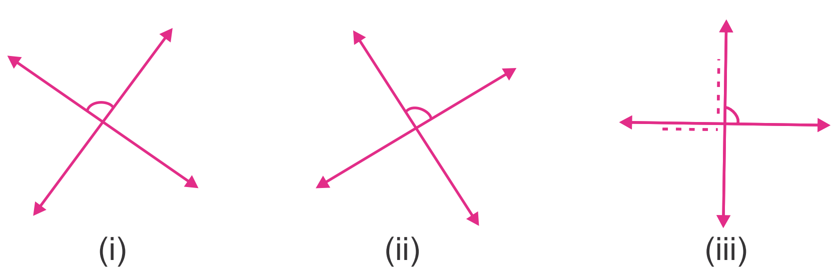
उपर्युक्त उदाहरण से आपने यह देखा कि एक तल पर रखी हुई किसी वस्तु की स्थिति को दो लम्ब रेखाओं की सहायता से निरूपित किया जा सकता है। यदि वस्तु एक बिन्दु के रूप में है तो हमें सबसे नीचे वाली रेखा से और कागज की बाईं कोर से बिन्दु की दूरी ज्ञात होना आवश्यक होता है। व्यायाम प्रदर्शन के लिए खड़े होने की योजना के सम्बन्ध में हमें स्तम्भ और पंक्तियों की संख्या को जानना आवश्यक होता है।

12.2 कार्तीय पद्धति

संख्या रेखा पर एक नियत बिन्दु से दूरियों को एक दिशा में धनात्मक और दूसरी दिशा में ऋणात्मक अंकित किया जाता है। उस बिन्दु को जहाँ से दूरियाँ अंकित की जाती है मूल बिन्दु कहा जाता है। एक रेखा पर समान दूरियों पर बिन्दुओं को अंकित करने के लिए हम संख्या रेखा का प्रयोग संख्याओं को निरूपित करने के लिए करते हैं। यदि एक एकक दूरी संख्या '1' को निरूपित करती है तो '3' एकक दूरी, संख्या '3' को निरूपित करेगी जहाँ '0' मूल बिन्दु है।
देखें चित्र–



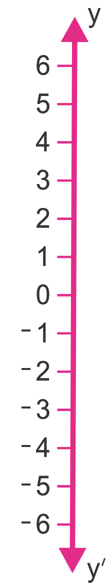
दकार्ते ने एक तल पर एक दूसरे पर लम्ब दो रेखाओं को खींचने और इन रेखाओं के सापेक्ष तल पर बिन्दुओं का स्थान निर्धारण करने का विचार प्रस्तुत किया। लम्ब रेखाएँ किसी भी दिशा में हो सकती हैं जैसा कि आकृति 12.2 (i), (ii), (iii) में दिखाया गया है। लेकिन जब हम इस अध्याय में एक तल में स्थित एक बिन्दु का स्थान निर्धारण करने के लिए दो रेखाएँ लेंगे, तो एक रेखा क्षैतिज होगी और दूसरी रेखा उर्ध्वाधर, जैसा कि आकृति (iii) में दिखाया गया है–



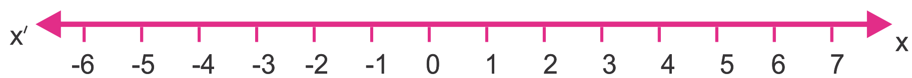
आकृति 12.2

वास्तव में हम इन रेखाओं को इस प्रकार प्राप्त कर सकते हैं! दो संख्या रेखाएँ लीजिए और उन्हें X′X और Y′Y का नाम दीजिए । X′X को क्षैतिज रखिए। देखिए आकृति (i) और इस पर

ठीक उसी प्रकार संख्याएँ लिखिए जैसा कि संख्या रेखा पर लिखी जाती है। ये ही सभी क्रियाएँ आप Y′Y के साथ कीजिए (आकृति (ii)) अंतर केवल यही है कि Y′Y क्षैतिज नहीं है अपितु उर्ध्वाधर है।



(ii)

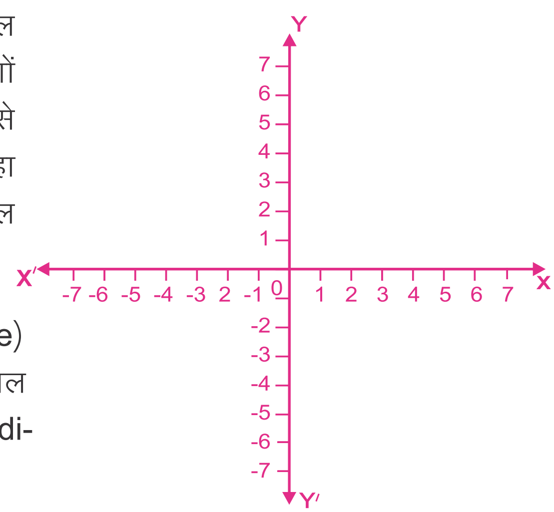


(i)

दोनों रेखाओं का संयोजन इस प्रकार कीजिए कि ये दोनों रेखाएँ एक दूसरे को मूलबिन्दू पर काटती हों (आकृति–iii) क्षैतिज रेखा X'X को X अक्ष तथा उर्ध्वाधर रेखा Y′Y को Y अक्ष कहा जाता है। वह बिन्दु जहाँ X' X और Y' Y एक दूसरे को काटती है उसे मूल बिन्दु (Origin) कहा जाता है और इसे O से प्रकट किया जाता है। क्योंकि धनात्मक संख्याएँ OX और OY की दिशाओं में स्थित है इसलिए OX और OY को क्रमशः X अक्ष और Y अक्ष की धनात्मक दिशाएँ कहा जाता है। इसी प्रकार OX' और OY' को X–अक्ष और Y–अक्ष की ऋणात्मक दिशाएँ कहा जाता है।

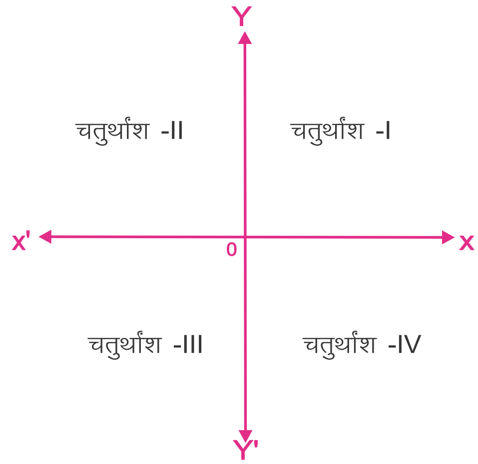
आकृति (iii) में हम देखते हैं कि ये दोनों अक्ष तल को चार भागों में विभाजित करते हैं। इन चार भागों को चतुर्थांश (Quadrants) कहा जाता है। OX से वामावर्त दिशा में इन्हें I, II, III, IV चतुर्थांश कहा जाता है (देखिए आकृति (iv)) इस प्रकार, इस तल में दोनों अक्ष और चारों चतुर्थांश सम्मिलित हैं।

इस तल को कार्तीय तल (Cartesian Plane) या निर्देशांक तल (Coordinate Plane) या xy तल (xy Plane) तथा अक्षों को निर्देशांक अक्ष (Coordinate axis) कहा जाता है।



(iii)

x– अक्ष, y–अक्ष तथा मूल बिन्दू o को संयुक्त रूप से निर्देश फ्रेम कहते हैं।

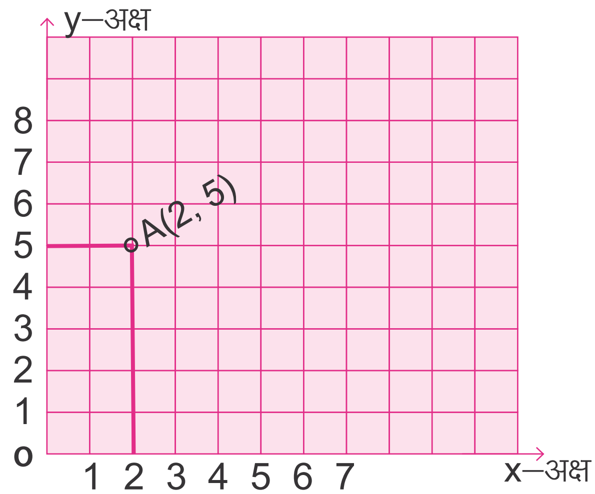


(iv)

12.3 निर्देशांक

कल्पना कीजिए आप किसी स्टेडियम में क्रिकेट मैच देखने जाते हैं और अपनी आरक्षित सीट पर पहुँचना चाहते हैं। इसके लिए आपको दो संख्याएँ चाहिए। पहली पंक्ति संख्या तथा दूसरी स्तम्भ संख्या। बिन्दु A (2,5) के स्थान का निर्धारण बाएँ किनारे से 2 इकाई और निचले किनारे से 5 इकाई है। वर्गांकित कागज पर संख्या 2, बिन्दु का x–निर्देशांक तथा 5, y –निर्देशांक कहलाता है। इस प्रकार हम कहते हैं कि (2, 5) बिन्दु के निर्देशांक हैं। किसी बिन्दु की y–अक्ष से लम्बवत दूरी को उस बिन्दु का भुज कहते हैं। इसी प्रकार किसी बिन्दु की x–अक्ष से लम्बवत् दूरी को उस बिन्दु की कोटि कहते हैं इस प्रकार बिन्दु A की भुज 2 और कोटि 5 है।

निर्देशांक लिखते समय छोटे कोष्ठक ( ) से दर्शाते हैं फिर पहले भुज तथा अल्प विराम (,) लगाकर कोटि लिखते हैं। इस प्रकार बिन्दु के निर्देशांक (x, y) हैं।

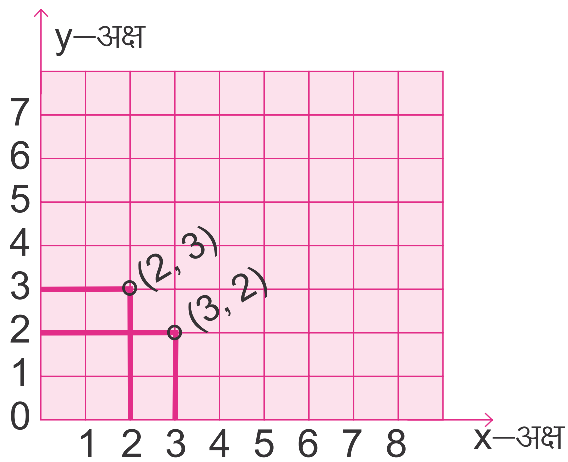


आलेख 12.1

> मूल बिन्दू के लिए भुज 0 (शून्य) तथा कोटि 0 (शून्य) होता है तथा मूल बिन्दु के निर्देशांक (0, 0) लिखते हैं। निर्देशांक (x, y) तथा (y, x) समान नहीं है तथा वह कार्तीय तल पर अलग अलग बिन्दुओं को निरूपित करते हैं।

यह भी कीजिए–

एक आलेख में बिन्दु (2, 3) अंकित कीजिए। क्या यह वही बिंदु है जो (3, 2) को दर्शाता है?



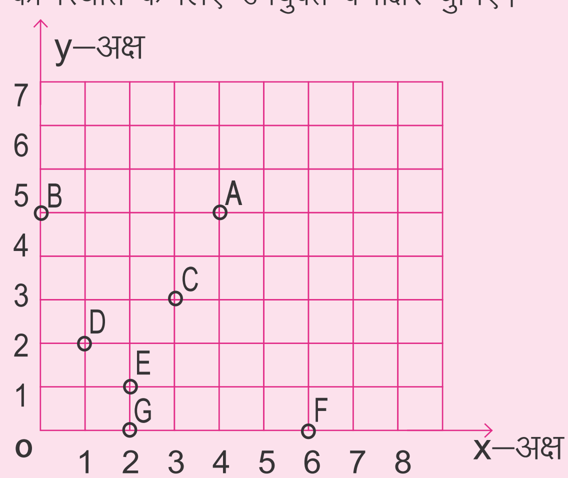
आलेख 12.2

समीर– दोनों बिन्दु के स्थान अलग – अलग हैं।

करो और सीखो

(1) आलेख 12.3 देखकर निम्न बिन्दुओं की स्थिति के लिए उपयुक्त वर्णाक्षर चुनिए।

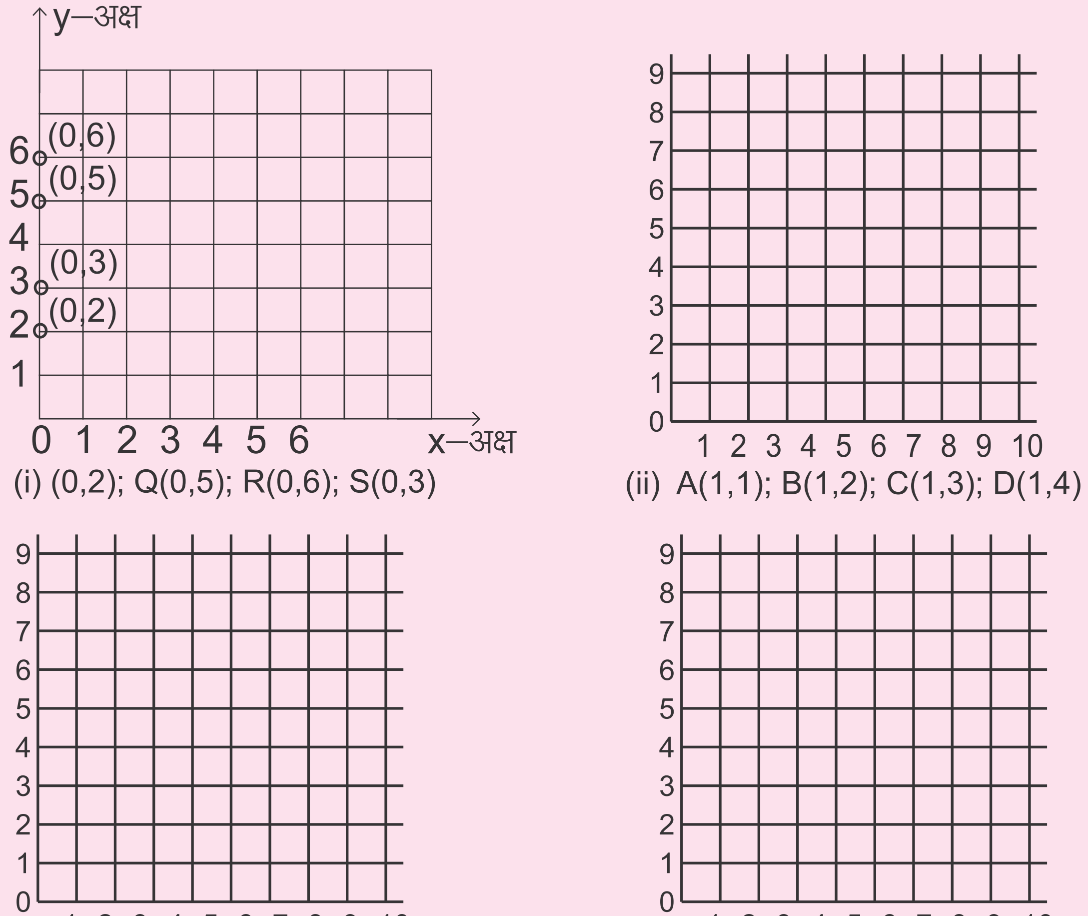
- (i) (2, 1)
- (ii) (0, 5)
- (iii) (2, 0)
- (iv) बिन्दु A के निर्देशांक
- (v) बिन्दु F के निर्देशांक



आलेख 12.3

(2)

निम्न निर्देशांकों को वर्गांकित कागज पर अंकित कीजिए और देखिए क्या ये सभी सरल रेखा में हैं। अगर हैं तो रेखा को नाम दीजिए। **(आलेख 12.4 (i)(ii)(iii)(iv))**



(i) (0,2); Q(0,5); R(0,6); S(0,3)

(ii) A(1,1); B(1,2); C(1,3); D(1,4)

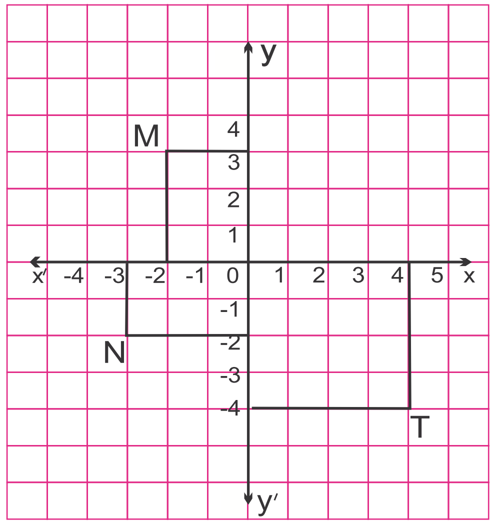
(iii) K(1,3); L(2,3); M(3,3); N(4,3)

(iv) W(2,6);X(3,5); Y(5,3); Z(6,2)

आलेख 12.4

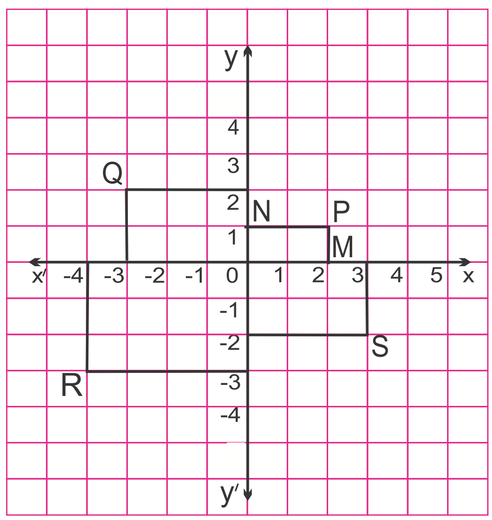
प्रश्नावली 12.1

1. नीचे दिए आलेख 12.5 को देखकर रिक्त स्थानों में लिखिए।
   (i) बिन्दु M की x–अक्ष से दूरी.......................... इकाई है।
   (ii) बिन्दु M की y–अक्ष से दूरी .... इकाई है।
   (iii) बिन्दु N की y–अक्ष से दूरी ....इकाई है।
   (iv) बिन्दु T.................चतुर्थांश में अंकित है।
   (v) बिन्दु T की x–अक्ष से दूरी ....इकाई है।



आलेख 12.5

2. निम्नांकित आलेख 12.6 में अंकित बिन्दुओं को देखकर रिक्त स्थानों को भरिए।



आलेख 12.6

(i) बिन्दु P का भुज .... और कोटि .... है अतः P के निर्देशांक (................,................) है।

(ii) बिन्दु Q का भुज .... और कोटि .... है अतः Q के निर्देशांक (...........,...........) है।

(iii) बिन्दु R का x निर्देशांक ...... और y निर्देशांक .... है, अतः R के निर्देशांक (.........,.........) है।

(iv) बिन्दु S का x निर्देशांक .... और y निर्देशांक .... है अतः S के निर्देशांक (........,.........) है।

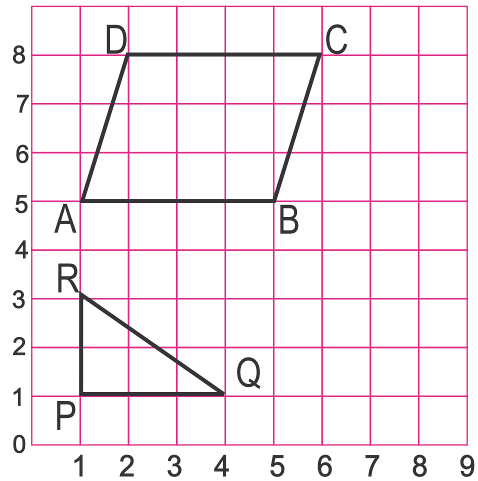
3. निम्न बिंदुओं को वर्गांकित कागज पर अंकित कीजिए और जाँचिए कि क्या वे सभी एक सरल रेखा पर स्थित हैं?

(i) A (1,1); B(1,2); C(1,3); D(1,4)

(ii) K (1,3); L(5,3); M(5,5); N(1,5)

(iii) P (2,6); Q(5,5); Y(5,3); Z(6,3)

4. ग्राफ पेपर पर निम्नलिखित **आलेख** 12.7 बनाकर नीचे दिए गए प्रश्नों के उत्तर लिखिए।



आलेख 12.7

(i) समान्तर चतुर्भुज ABCD के शीर्षों के निर्देशांक लिखिए तथा भुजा AB तथा DC की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

(ii) त्रिभुज PQR के शीर्षों के निर्देशांक ज्ञात कीजिए तथा आधार PQ की लम्बाई ज्ञात कीजिए

5. प्रत्येक कथन के सामने सत्य या असत्य लिखिए –

(i) ग्राफ पेपर पर बिन्दु की स्थिति को संख्या युग्म द्वारा दर्शाया जाता है।

(ii) रैखिक आलेख समय के अंतरालों के साथ आँकड़ों में परिवर्तन दर्शाता है।

(iii) कोई बिंदु जिसका x–निर्देशांक शून्य है तथा y–निर्देशांक शून्येत्तर है y–अक्ष पर स्थित होता है।

(iv) कोई बिन्दु जिसका y–निर्देशांक शून्य है तथा x- निर्देशांक 5 है, y अक्ष पर स्थित होगा।

(v) मूल बिन्दु के निर्देशांक (1, 1) होते हैं।

कुछ अनुप्रयोग

दैनिक जीवन में आपने देखा होगा कि किसी भी सुविधा का जितना अधिक उपयोग आप करते हैं उतना ही अधिक उसके लिए मूल्य देना होता है। अगर आप बिजली अधिक खर्च करते हैं तब आपको बिल भी अधिक देना होगा । अगर आप बिजली कम खर्च करते हैं तो बिल भी कम आएगा।

यहाँ एक राशि दूसरी राशि को प्रभावित करती हैं। हम कहते हैं कि बिजली की मात्रा एक मुक्त या स्वतंत्र चर है जबकि बिजली का बिल एक आश्रित चर है। ऐसी राशियों के संबंध को हम आलेख द्वारा प्रदर्शित कर सकते हैं।

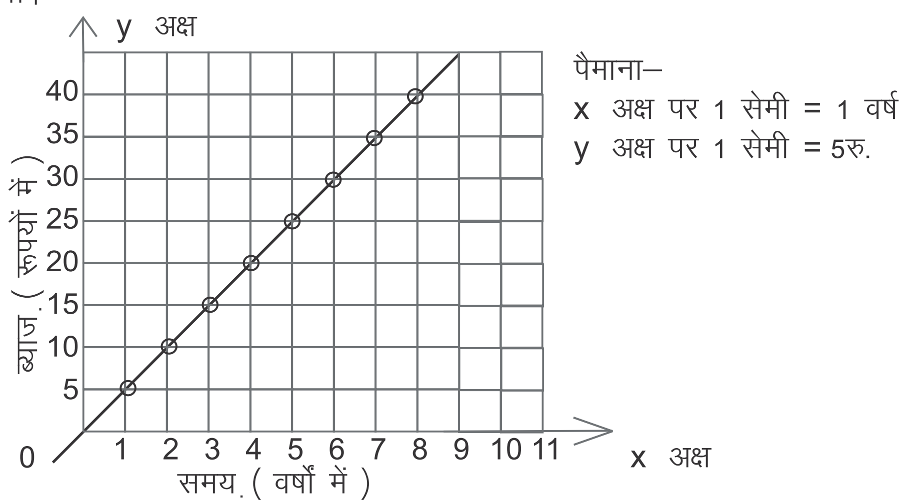
12.4 लेखाचित्र द्वारा कुछ वास्तविक संबंधों का निरूपण

उदाहरण 1 दिए गए मूलधन पर दी गई ब्याज दर से समय और साधारण ब्याज के संबंध का लेखाचित्र द्वारा निरूपण कीजिए।

हल दिए गए मूलधन, माना 100 रू पर 5 प्रतिशत प्रतिवर्ष की दर से साधारण ब्याज मिलता है तो इस संबंध को ब्याज = 5 x समय से निरूपित किया जा सकता है। समय (t) के विभिन्न मानों के संगत ब्याज (I) = 5 x समय (t) का मान ज्ञात करके निम्नांकित सारणी के रूप में लिखते हैं।

t (वर्षों में) समय	1	2	3	4	5	6	7	8
ब्याज I =5t (रु. में)	5	10	15	20	25	30	35	40

प्राप्त बिन्दुओं को (1, 5); (2, 10);(3, 15);(4, 20);(5, 25);(6, 30);(7, 35);(8, 40) ग्राफ पेपर पर अंकित करने पर वर्षों और प्राप्त ब्याज के संबंध का आलेख प्राप्त होगा। ये आलेख एक सरल रेखा को प्रदर्शित करेगा।

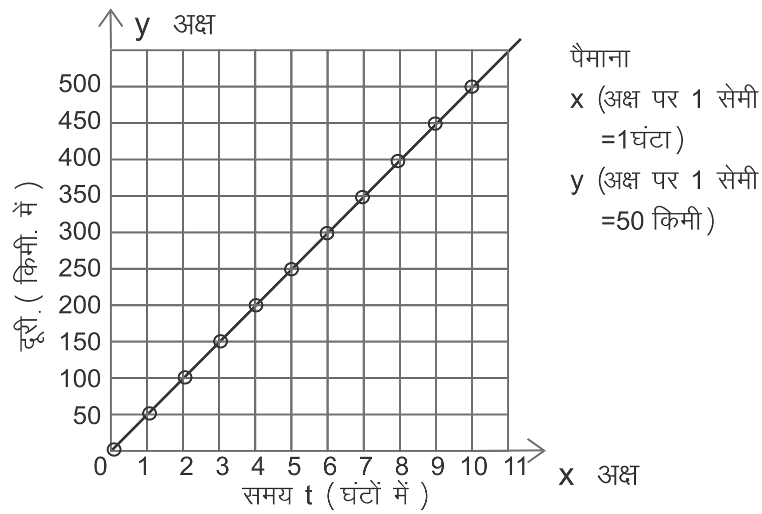


आलेख 12.8

उदाहरण 2 एक गतिशील कार 1 घंटे में 50 किमी. दूरी तय करती है। कार द्वारा तय की गई दूरी और समय के संबंध को d=50x t से प्राप्त किया जा सकता है, जहाँ पर समय (t) घंटों में और दूरी (d) किमी. में है। इस संबंध को ग्राफ पेपर पर निरूपित कीजिए। समय (t) के विभिन्न मानों के लिए तय दूरी को निम्नंकित सारणी में दर्शाया गया है।

समय t (घंटों में)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
दूरी d=50t (किमी. में)	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500

हल प्राप्त निर्देशांक बिन्दु (1,50), (2,100), (3,150), (4,200), (5,250), (6,300), (7,350), (8,400), (9,450), (10,500) को ग्राफ पेपर पर अंकित करने पर समय और दूरी के संबंध का ग्राफ प्राप्त होता है जो एक रेखा में दर्शाया गया है।



आलेख 12.9

12.5 आलेख (लेखा चित्र) को पढ़ना

अब हमने समय ब्याज, समय, दूरी के मध्य आलेख खींचा। इसी प्रकार संख्याओं के गुणज (जैसे 3 के गुणज = 3, 6, 9, 12.......), वर्ग की भुजा एवं परिमाप आदि के मध्य आलेख खींच सकते हैं। अब हम देखें कि दिए गए आलेख को कैसे पढ़ सकते हैं?

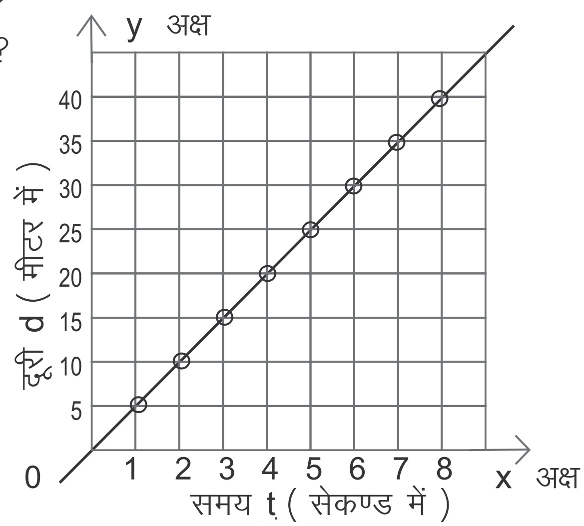
निम्न उदाहरणों को देखिए–

उदाहरण 3 आलेख 12.10 को ध्यान पूर्वक देखिए और निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

1. 2 सेकण्ड में तय की गई दूरी क्या है?
2. 6 सेकण्ड में तय की गई दूरी क्या है?
3. 20 मी. जाने में लगा समय कितना है?
4. वाहन की चाल प्रति सेकण्ड क्या है ?

हल आलेख से स्पष्ट है कि–

1. 2 सेकण्ड में तय दूरी = 10 मीटर
2. 6 सेकण्ड में तय दूरी = 30 मीटर
3. जब दूरी = 20 मीटर तब समय = 4 सेकण्ड
4. चाल $= \frac{\text{दूरी}}{\text{समय}} = \frac{20}{4} = 5$ मीटर /सेकण्ड



आलेख 12.10

प्रश्नावली 12.2

1. किसी समबाहु त्रिभुज एवं वर्ग की एक भुजा की लम्बाई x सेमी है। उनके परिमाप ज्ञात कर लम्बाई और परिमाप के सम्बन्ध का आलेख खींचिए।

   (संकेत =△ का परिमाप = $x + x + x$) सेमी

2. एक आयत की लम्बाई उसकी चौड़ाई से दुगनी है। आयत के क्षेत्रफल और चौड़ाई के सम्बन्ध का आलेख खींचिए।

   (संकेत = आयत का क्षेत्रफल A = $2x \times x = 2x^2$)

3. निम्न तालिका अनुसार समय और साधारण ब्याज के मध्य आलेख खींचिए।

समय	1 वर्ष	2 वर्ष	3 वर्ष	4 वर्ष
सा. ब्याज	60 रु.	120 रु.	180 रु.	240 रु.

4. समय और दूरी के सम्बन्ध को प्रदर्शित करने वाला आलेख खींचिए।

समय	2	4	6	8
दूरी	10	20	30	40

5. निम्न तालिका के आधार पर एक आलेख बनाइए और बताइए कि क्या यह आलेख मूल बिन्दु से गुजरता है ?

जमा धन (रु. में)	1000	2000	3000	4000	5000
सा. ब्याज (रु. में)	80	160	240	320	400

हमने सीखा

1. **रेखा आलेख** जो एक पूर्ण अखंडित रेखा हो, एक **रैखिक आलेख** कहलाता है।
2. वर्गांकित कागज पर किसी बिन्दु की स्थिति निर्धारित करने के लिए हमें **x–अक्ष** तथा **y–अक्ष** चाहिए।
3. किसी बिन्दु की y अक्ष से लम्बवत दूरी को **'भुज'** तथा x अक्ष से लम्बवत् दूरी को **'कोटि'** कहते हैं।
4. एक **स्वतंत्र चर** तथा **आश्रित चर** में संबंध एक आलेख द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।
5. मूल बिन्दु के निर्देशांक (0, 0) है।

अध्याय 13

राशियों की तुलना

13.1 प्रतिशत

हमने पिछली कक्षा में पढ़ा है कि अनुपात का अर्थ दो या दो से अधिक समान राशियों में तुलना करना है।

यदि लव के पास 5 रूपये व कुश के पास 10 रूपये हो तो उनके रूपयों का अनुपात
5 : 10

अर्थात सरल रूप में 1 : 2 होगा।

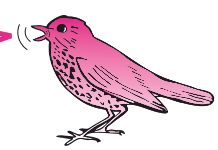
इसे भिन्न रूप में $\frac{1}{2}$ लिखा जा सकता है।

इसको हम प्रतिशत के रूप में प्रदर्शित कर सकते हैं जैसा हम जानते हैं कि प्रतिशत का अर्थ है 100 में से कितना ?

यदि 2 में से 1 है तो 100 में से 50 होगा

अर्थात् $1 : 2 = \frac{1}{2} = \frac{1 \times 50}{2 \times 50} = \frac{50}{100} = 50\%$

इसे 50 प्रतिशत पढ़ते हैं।



आइए हम ऐसे कुछ और उदाहरण लेकर इसे विस्तार से समझते हैं–

हरमीत तथा नीलम खेत से टोकरी में टिन्डी और काचरे तोड़कर लाई। घर आकर गिना तो पाया कि 14 टिन्डी तथा 6 काचरे थे।

क्या आप टिन्डी तथा काचरों की संख्या में कोई तुलना कर सकते हैं? टोकरी में दो प्रकार की सब्जी है। इनमें तुलना 14 : 6 या 7 : 3

टिन्डी की संख्या, काचरों की संख्या का $\frac{7}{3}$ है। इसी प्रकार काचरों की संख्या, टिन्डी की संख्या का $\frac{3}{7}$ हैं।

यह तुलना प्रतिशत में भी करके देखते हैं

हरमीत का तरीका–

सब्जी के कुल नग –20

20 नग सब्जी में 6 काचरे हैं

अतः काचरों का प्रतिशत

$\frac{6}{20} \times \frac{5}{5} = \frac{30}{100} = 30\%$

(हर को 100 बनाया गया है)

नीलम का तरीका (ऐकिक विधि से)

20 नग सब्जी में काचरे की संख्या 6 है

अतः 1 नग सब्जी में काचरे की संख्या = $\frac{6}{20}$

100 नग सब्जी में काचरों की संख्या

$= \frac{6}{20} \times 100$

$= 30\%$

टोकरी में टिन्डे तथा काचरे हैं,

इसलिए टिन्डों का प्रतिशत + काचरों का प्रतिशत = 100

टिन्डों का प्रतिशत + 30 = 100

या टिन्डों का प्रतिशत = 100 - 30 = 70

अतः टोकरी में 70% टिन्डे तथा 30% काचरे हैं।

उदाहरण 1 राजस्थान के झालावाड़ के एक विद्यालय में पर्यावरण पखवाड़े के अंतर्गत रोपे गए पौधों में 25% नीम, 15% जामुन तथा शेष पीपल के पौधे लगाए गए हैं।

यदि लगाए गए कुल पौधे 160 हों तो–

(i) नीम के पौधों की संख्या कितनी है ?

(ii) जामुन के पौधों की संख्या कितनी है ?

(iii) नीम के पौधे व जामुन के पौधों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

(iv) पीपल के पौधों की संख्या एवं प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

(v) नीम के पौधे पीपल के पौधों से कितने प्रतिशत कम हैं ?

हल कुल पौधों की संख्या = 160

(i) नीम के पौधों की संख्या 160 का 25%

$$=160 \times \frac{25}{100}$$

= 40 पौधे

नीम के पौधों की संख्या = 40 पौधे

(ii) जामुन के पौधों की संख्या 160 का 15%

$$=160 \times \frac{15}{100}$$

= 24 पौधे

जामुन के पौधों की संख्या = 24 पौधे

(iii) नीम के पौधे : जामुन के पौधे

40 : 24

5 : 3

(iv) पीपल के पौधों की संख्या = कुल रोपे गए पौधे - (नीम के पौधे + जामुन के पौधे)

= 160 - (40 + 24)

$= 160 - 64$
$= 96$ पौधे

पीपल के पौधों का प्रतिशत = ?

$\because$ 160 कुल पौधों में से पीपल के पौधे = 96 पौधे

$\therefore$ 100 पौधों में से पीपल के पौधे $= \frac{96}{160} \times 100$

$= 60\%$

(v) नीम के पौधे तथा पीपल के पौधों में प्रतिशत अन्तर $= 60\% - 25\%$

$= 35\%$

उदाहरण 2 एक विद्यार्थी को गणित में 10 अंक मिले। यदि यह 40% है तो बताइए गणित की परीक्षा का पूर्णांक कितना है ?

हल गणित में प्राप्तांक = 10

चूँकि पूर्णांक का 40%, 10 अंक है।

माना कि पूर्णांक $= x$ अंक है

अतः x का 40% = 10

या $x \times \frac{40}{100} = 10$

या $40x = 1000$

या $x = \frac{1000}{40}$

या $x = 25$ अंक

करो और सीखो

रश्मि तथा रेहाना बाग से टोकरी में फूल चुनकर लाए। जिसमें 30% गुलाब 10% चमेली तथा शेष गेंदा के फूल हैं यदि टोकरी में 120 फूल हो तो–

(i) गेंदा के फूलों की संख्या कितनी है?

(ii) चमेली के फूलों की संख्या कितनी है?

(iii) गुलाब के फूल गेंदा के फूलों से कितने प्रतिशत कम हैं?

प्रश्नावली 13.1

1. निम्नलिखित अनुपातों को प्रतिशत में परिवर्तित कीजिए।
   (i) 1: 4 (ii) 3:4
2. हिमी ने 240 किमी की यात्रा बस से की तथा 360 किमी की यात्रा रेल से की, तो ज्ञात कीजिए।
   (i) रेल द्वारा की गई यात्रा व बस द्वारा की गई यात्रा का अनुपात।
   (ii) बस द्वारा एवं रेल द्वारा की गई यात्रा का अनुपात।
   (iii) रेल द्वारा की गई यात्रा एवं कुल यात्रा का अनुपात।
   (iv) बस द्वारा की गई यात्रा तथा कुल यात्रा का अनुपात।
3. कक्षा VIII के 75 विद्यार्थियों में से 68% विद्यार्थियों ने गणित में ग्रेड A प्राप्त की। कितने विद्यार्थी A ग्रेड हैं ?
4. एक विद्यालय की कबड्डी की टीम ने इस वर्ष कुल जितने मैच खेले उनमें से 15 मैच में जीत हासिल की। यदि उनकी जीत का प्रतिशत 75 था तो उस टीम ने कुल कितने मैच खेले ?
5. मोहन के खेत में कुल 1275 वृक्ष हैं। इनमें से 36% वृक्ष फलदार हैं। खेत में फलदार वृक्षों की संख्या ज्ञात कीजिए।
6. प्रधानमंत्री जन धन योजना के अंतर्गत कमली के खाते में जमा राशि में से 75% राशि उसने खर्च कर दी। अब उसके खाते में 600 रूपए शेष हैं। ज्ञात कीजिए कि खाते में कुल कितनी राशि जमा हुई थी ?
7. राजस्थान के पाँच जिलों में से मिड डे मिल के अंतर्गत 50 हजार छात्रों के सर्वे के आधार पर 60% छात्र दाल रोटी पसंद करते हैं, 25% छात्र सब्जी रोटी पसंद करते हैं एवं शेष छात्र खिचड़ी पसंद करते हैं तो, ज्ञात कीजिए कि कितने प्रतिशत छात्र खिचड़ी पसंद करते हैं ?

13.2 लाभ – हानि (अंकित मूल्य, कमीशन, वैट, बट्टा, ऊपरी खर्च, छूट, सेवाकर इत्यादि)

नीलम ने रेडिमेड कपड़ों की लॉरी लगाई, जिसमें छोटे बच्चों की ड्रेस बेच रही है। वह एक ड्रेस 50 रूपए में खरीदकर 100 रूपए में बेच रही है, तो उसका 100% लाभ रहा।

कुछ दिन बाद बिक्री के लिए ड्रेस पर कशीदा कर पैकिंग करवाकर बेचना प्रारम्भ किया। जिससे प्रत्येक ड्रेस पर 10 रूपए अतिरिक्त खर्च लगा, इस प्रकार अब उसका लाभ प्रति ड्रेस 100- (50+10) = 40 रूपए हुआ तो लाभ प्रतिशत $\frac{40}{60} \times 100 = 66\frac{2}{3}$ % रहा।

वस्तुओं को खरीदते समय अथवा बेचने से पहले कुछ अतिरिक्त धन खर्च किया जाता है। वह क्रय मूल्य में जोड़ा जाता है, वो ऊपरी खर्च कहलाता है। जैसे हमाली, परिवहन, दलाली, गोदाम किराया इत्यादि ऊपरी व्यय है। काफी अनुभव के बाद नीलम ने कपड़े खरीद कर बेचने की बजाय टेलर से तैयार कर बेचने की सोची, 2000 रूपए मूल्य का कपड़ा खरीदा उस पर यदि 10% की छूट मिले तो छूट के बाद क्रय मूल्य 2000 - 200 = 1800 रूपये हुआ।

यदि उसने सिलाई, कढ़ाई इत्यादि पर 950 रूपये खर्च करके 25 ड्रेसें बनवाई तो 25 ड्रेसों का लागत मूल्य क्या होगा ?

(1800 + 950) रूपये = 2750 रूपये

एक ड्रेस का लागत मूल्य (क्र. मू.) = $\frac{2750}{25}$ = 110 रूपये है यदि 20% लाभ से ड्रेस बेची जाए तो प्रत्येक ड्रेस का विक्रय मूल्य क्या होगा ?

20% लाभ से विक्रय मूल्य = क्रय मूल्य का (100 + 20)%

$= 110 \times \frac{120}{100}$

$= \frac{13200}{100}$ = 132 रूपये

व्यापार में उसकी बढ़ती बिक्री को देख उसने एक दुकान खोली। अब यदि वह ग्राहक को बेचे गए सामान पर 15% वैट (Value added tax) लगाती है, तो ग्राहक को एक ड्रेस कितने में खरीदनी पड़ेगी?

> Vat (वैट) – सामान/वस्तु के बेचने पर खरीददार से वसूला जाने वाला टेक्स।

15% की दर से प्रत्येक ड्रेस पर लगने वाला वैट = विक्रय मू. का 15%

$= 132 \times 15\% = \frac{132 \times 15}{100}$

=19.80 रूपये

वैट सहित एक ड्रेस का विक्रय मूल्य = 132 + 19.80 रूपये

= 151.80 रूपये

इस प्रकार की समस्याओं का हल निम्न प्रकार भी कर सकते हैं।

तुलसी ने एक कशीदे की मशीन 8% वैट सहित 17280 रूपये में खरीदी तो मशीन का वैट के जुड़ने से पहले मूल्य (वास्तविक मूल्य) कितना था ? सोचो और बताओ।

माना कि वैट रहित मशीन का मूल्य	वैट सहित मशीन का मूल्य
100	108
x	17280

पहला तरीका (समानुपात से)

$100 : x :: 108 : 17280$

बाहरी पदों का गुणनफल = मध्य पदों का गुणनफल

$100 \times 17280 = 108x$

$\frac{100 \times 17280}{108} = x$

$100 \times 160 = x$ या $x = 16000$ रूपये

वैट रहित मशीन का मूल्य =16000 रूपये

दूसरा तरीका (ऐकिक नियम से)

यदि 108 रूपये मशीन का वैट सहित वि. मू. हो तो वैट रहित मूल्य = 100

अतः 1 रूपया मशीन का वैट सहित वि. मू. हो तो वैट रहित मूल्य = $\frac{100}{108}$

अतः 17280 रूपये मशीन का वैट सहित वि. मू. हो तो वैट रहित मूल्य = $\frac{100}{108} \times 17280$

= 100 x160 =16000 रू.

करो और सीखो

1. रीना खादी भन्डार से खरीदे गए माल का बिल लेकर आई। इस बिल को देखकर दिए गए सवालों का जबाव दीजिए।

आजाद खादी भन्डार

बिल संख्या 1501 दिनांक 5–10–2015

श्रीमान———————————————

क्र.सं.	वस्तु/सामान	मात्रा	दर	राशि(रूपये)
1.	बैडशीट	4	80	320=00
2.	खेस	4	120	480=00
3.	दरी	2	200	400=00
				1200=00
	छूट 15%			-180=00
				1020=00
	वैट 10%			102=00
	अक्षरे एक हजार एक सौ बाइस रू. मात्र			1122=00

भूल चूक लेनी देनी हस्ताक्षर

–खरीदे गए सामान का कुल अंकित मूल्य कितना है?

–छूट किस मूल्य पर दी जाती है?

–वैट किस मूल्य पर लगाया जाता है?

2. 5000 रूपये की तुलना में 4000 रूपये कितने प्रतिशत कम हैं ? क्या यह प्रतिशत उतना ही है जितना 4000 रूपये की तुलना में 5000 रूपये अधिक है ?

उदाहरण 3 960 रूपये अंकित मूल्य वाली वस्तु 672 रूपये में बेची जाती है। बट्टा प्रतिशत कितना है ?

हल अंकित मूल्य = 960 रूपये

वस्तु का विक्रय मूल्य = 672 रूपये

बट्टा = अंकित मूल्य - विक्रय मूल्य

= 960 - 672

बट्टा = 288 रूपये

$\because$ 960 रूपये अंकित मूल्य पर बट्टा मिलता है = 288 रूपये

$\therefore$ 1 रूपया अंकित मूल्य पर बट्टा मिलता है $= \frac{288}{960}$

$\therefore$ 100 रूपये अंकित मूल्य पर बट्टा मिलता है $= \frac{288}{960} \times 100$

बट्टा = 30%

उदाहरण 4 अंकित मूल्य पर 20% बट्टा देने के बाद एक पेन्ट 560 रूपये में बेची गई। पेन्ट का अंकित मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल विक्रय मूल्य = 560 रूपये

चूँकि 20% बट्टे का अर्थ है कि 100 रूपये अंकित मूल्य पर 20 रूपये का बट्टा है।

अतः विक्रय मूल्य = 100-20

= 80 रूपये

$\because$ 80 रूपये विक्रय मूल्य है तो पेन्ट का अंकित मूल्य = 100 रूपये

$\therefore$ 1 रूपया विक्रय मूल्य है तो पेन्ट का अंकित मूल्य $= \frac{100}{80}$ रूपये

$\therefore$ 560 रूपये विक्रय मूल्य है तो अंकित मूल्य $= \frac{100}{80} \times 560$ रूपये

= 700 रूपये

पेन्ट का अंकित मूल्य = 700 रूपये

उदाहरण 5 सुखवीर सिंह ने एक छिड़काव यंत्र 10% कर सहित 4400 रूपये में खरीदा। कर के जुड़ने से पहले छिड़काव पम्प का मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल माना कि कर रहित मूल्य 100 रूपये है।

तो कर सहित मूल्य 100 + 10 = 110 रूपये है।

$\because$ 110 रूपये कर सहित मूल्य है तो वास्तविक मूल्य = 100 रूपये

$\therefore$ 1 रूपया कर सहित मूल्य है तो वास्तविक मूल्य = $\frac{100}{110}$ रूपये

$\therefore$ 4400 रूपये कर सहित मूल्य है तो वास्तविक मूल्य = $\frac{100}{110}$ x 4400 रूपये

= 4000 रूपये

अतः छिड़काव पम्प का कर रहित मूल्य = 4000 रूपये

उदाहरण 6 रामू ने दो छत के पंखे 1800 रूपये प्रति पंखे की दर से खरीदे। उसमें एक पंखे को 5% हानि से और दूसरा पंखा 12% लाभ से बेचा। प्रत्येक पंखे का विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए। कुल लाभ अथवा हानि भी बताइए।

हल प्रत्येक पंखे का क्रय मूल्य = 1800 रूपये

एक पंखा 5% हानि से बेचा जाता है तब

$\because$ 100 रूपये क्रय मूल्य है तो पंखे का विक्रय मूल्य = 95 रूपये

$\therefore$ 1800 रूपये क्रय मूल्य है तो पंखे का विक्रय मूल्य = $\frac{95}{100}$ x 1800 रूपये

= 1710 रूपये

दूसरे पंखे को 12% लाभ से बेचा गया अतः

$\because$ 100 रूपये क्रय मूल्य है तो पंखे का विक्रय मूल्य = 112 रूपये

$\therefore$ 1 रूपया क्रय मूल्य है तो पंखे का विक्रय मूल्य = $\frac{112}{100}$ रूपये

$\therefore$ 1800 रूपये क्रय मूल्य है तो पंखे का विक्रय मूल्य = $\frac{112}{100}$ x 1800 रूपये

= 2016 रूपये

कुल क्रय मूल्य = 1800 रूपये + 1800 रूपये
= 3600 रूपये

कुल विक्रय मूल्य = 1710 रूपये+ 2016 रूपये
= 3726 रूपये

कुल क्रय मूल्य < कुल विक्रय मूल्य अतः लाभ होगा।

लाभ = 3726 रूपये -3600 रूपये
= 126 रूपयों का लाभ हुआ।

13.3 सरल ब्याज

उमेश 2400 रूपये 9% की दर से उधार लेता है। यदि वह उस धन को 3 वर्ष एवं 6 माह में चुकाना चाहता है तो उसे कितना ब्याज चुकाना होगा ?

वह शिक्षक के पास जाता है। वह पूछता है कि 3 वर्ष एवं 6 माह के लिए ब्याज की गणना कैसे करूँगा ?

शिक्षक ने कहा कि तुम समय को वर्षों में बदलो।

एक वर्ष में 12 माह होते हैं।

उधार लिया गया धन =2400 रूपये

ब्याज की दर = 9% वार्षिक

समय = 3 वर्ष 6 माह

समय $= 3$ वर्ष $+ \frac{6}{12}$ वर्ष

$= (3+\frac{1}{2})$ वर्ष

$= \frac{7}{2}$ वर्ष

सरल ब्याज $= \dfrac{\text{मूलधन ब्याज x समय x दर}}{100}$

$= 2400 \times \frac{7}{2} \times \frac{9}{100}$ रूपये

$= 756$ रूपये

मिश्रधन = मूलधन + ब्याज

$= 2400 + 756$

$= 3156$ रूपये

उदाहरण 7 ईश्वर कितना धन उधार दे कि 2 वर्ष 9 माह पश्चात वार्षिक ब्याज की दर से उसे ब्याज के 1831.50 रूपये मिल सके।

हल ब्याज की राशि = 1831.50 रूपये

दर = 12%

समय = 2 वर्ष 9 माह

$= 2+\frac{9}{12}$ वर्ष

$= 2+\frac{3}{4}$ वर्ष $= \frac{11}{4}$ वर्ष

$$\text{सरल ब्याज} = \text{मूलधन} \times \text{समय} \times \frac{\text{दर}}{100}$$

$$1831.50 = \text{मूलधन} \times \frac{11}{4} \times \frac{12}{100} \text{ रूपये}$$

$$1831.50 \times 4 \times 100 = \text{मूलधन} \times 11 \times 12$$

$$\text{मूलधन} \times 11 \times 12 = 1831.50 \times 4 \times 100$$

$$\text{मूलधन} = \frac{1831.50 \times 4 \times 100}{11 \times 12}$$

$$\text{मूलधन} = \frac{183150 \times 4 \times 100}{11 \times 12 \times 100}$$

$$= 5550 \text{ रूपये}$$

अतः ईश्वर द्वारा उधार दिया गया धन = 5550 रूपये

प्रश्नावली 13.2

1. मोहन कुछ दरी पट्टियाँ 7250 रूपये में खरीदता है। वह कुछ समय पश्चात 6090 रूपये में बेच देता है। तो मोहन की प्रतिशत हानि ज्ञात कीजिए ?

2. अजीत सिंह के वेतन में 12% वृद्धि से कुल नया वेतन 25760 रूपये हो जाता है तो उसका पूर्व का वेतन ज्ञात कीजिए ?

3. मनजीत अपने पंप सेट पर 40% बढ़ाकर मूल्य अंकित करता है यदि वह पंप सेट पर 40% की छूट देकर बेचना चाहता है तो उसकी लाभ या हानि प्रतिशत ज्ञात कीजिए ?

4. एक मोपेड का मूल्य 54000 रूपये है। इसके मूल्य में 14% की वृद्धि हो गई तो अब मोपेड का कितना मूल्य चुकाना पड़ेगा ?

5. एक व्यापारी ने 14000 रूपये का माल खरीदा। उसने 350 रूपये टेम्पो किराया, 150 रूपये मजदूरी के दिए। वह 5% लाभ के लिए माल को कितने में बेचेगा ?

6. एक फर्नीचर विक्रेता ने 7200 रूपये की दर से दो ड्रेसिंग टेबल बेची। उसमें से एक ड्रेसिंग टेबल पर 20% लाभ दूसरी पर 20% हानि हुई तो इस सौदे में कितने प्रतिशत लाभ अथवा हानि हुई ?

7. मनोज 52000 रूपये ऋण पर दो वर्ष बाद 6500 रूपये ब्याज का देता है। मनोज द्वारा दिए गए ब्याज की दर प्रतिशत ज्ञात कीजिए ?
8. कितने समय में 3200 रूपये का मूलधन 8% की दर से 3840 रूपये हो जाएगा ?

9. भूपेन्द्र ने 6300 रूपये 2 वर्ष 8 माह के लिए 7% की दर से ऋण लिया तो बताओ वह कितनी राशि लौटाएगा ?

13.4 चक्रवृद्धि ब्याज

बैंक पास बुक

दिनांक	विवरण	जमा	निकाली	शेष
1.4.13	रोकड़	2000	-	2000
1.4.14	ब्याज़	140	-	2140
1.4.15	ब्याज़	149.80	-	2289.80

पास बुक की प्रविष्ठी से बताइए।

– ब्याज कितनी– कितनी अवधि बाद जोड़ा जा रहा है।

– पहले वर्ष का ब्याज कितना जोड़ा गया ?

– दूसरे वर्ष का ब्याज कितना जोड़ा गया ?

– क्या प्रतिवर्ष प्राप्त ब्याज की राशि समान है ?

सुमन अपनी माँ से बैक खाते की पासबुक दिखाते हुए पूछती है–

सुमन– माँ, पिताजी दो वर्ष पूर्व 2000 रूपये बचत खाते में जमा करवा कर आए थे। पर बैंक द्वारा इस पर दिया जाने वाला ब्याज प्रतिवर्ष बढ़ क्यों जाता है?

माँ – हाँ, बेटी सामान्यतया लिया जाने वाला अथवा भुगतान किए जाने वाला ब्याज कभी साधारण नहीं होता है। नियत अवधि में तीन माह, छः माह अथवा एक वर्ष बाद ब्याज मूलधन में जोड़ दिया जाता है। इस नियत अवधि बाद मूलधन और ब्याज जुड़कर नया मूलधन बन जाता है। अतः हर बार ब्याज की राशि बढ़ी हुई दिखाई गई है।

सुमन– तब तो यह सरल ब्याज नहीं कहलाएगा। फिर इसकी गणना कैसे की जाती है।

माँ – हाँ यह चक्रवृद्धि ब्याज कहलाता है। आओ चक्रवृद्धि ब्याज की गणना करना सीखते हैं।

सुमन– प्रत्येक वर्ष का ब्याज अलग–अलग ज्ञात करके।

माँ – हाँ देखो तुम्हारे पिताजी ने बैंक में 2000 रूपये जमा करवाए थे।

चक्रवृद्धि ब्याज दर 7% वार्षिक है।

प्रथम एक वर्ष का सरल ब्याज $SI = \frac{P_1 \times T \times R}{100}$

$$SI = \frac{2000 \times 1 \times 7}{100} = 140 \text{ रूपये}$$

एक वर्ष के अंत में राशि $= P_1 + SI$

$= (2000 + 140)$ रूपये

$= 2140$ रू $= P_2$ (दूसरे वर्ष का मूलधन)

इस राशि पर दूसरे वर्ष का सरल ब्याज

$$SI_2 = \frac{P_2 \times T \times R}{100} = \frac{2140 \times 1 \times 7}{100} = 149.80 \text{ रूपये}$$

दूसरे वर्ष के अंत में भुगतान/प्राप्त की जाने वाली कुल राशि

अर्थात दूसरे वर्ष के अंत में कुल राशि = $P_2 + SI_2$

= 2140 + 149.80

= 2289.80 रूपये

सुमन– माँ दो वर्षों में कुल ब्याज

= (140 + 149.80) रूपये

= 289.80 रूपये हुआ यह तो साधारण ब्याज से ज्यादा है।

माँ – दो वर्ष का साधारण ब्याज = $\frac{P \times T \times R}{100}$

$= \frac{2000 \times 2 \times 7}{100}$

= 280 रूपये

हाँ माँ चक्रवृद्धि ब्याज से हमें दो वर्ष में इस बैंक से =289.80 - 280 =9.80 रूपये ज्यादा मिले हैं।

सुमन शिक्षक से – गुरूजी, चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात करने की सरल विधि क्या है।

शिक्षक – तुम सरल ब्याज करना सीख चुके हो, चलो चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात करना भी सीख लें। माना प्रथम वर्ष का मूलधन = P_1 तथा ब्याज दर = R% हो तो ब्याज की गणना निम्न प्रकार से से करते है।

एक वर्ष का व्याज $SI_1 = \frac{P_1 \times T \times R}{100}$

$= \frac{P_1 \times 1 \times R}{100}$

$= \frac{P_1 R}{100}$

$\therefore$ मिश्रधन $A_1 = P_1 + \frac{P_1 R}{100}$

$= P_1\left[1 + \frac{R}{100}\right] = P_2$ (दूसरे वर्ष का मूलधन)

$SI_2 = \frac{P_2 \times T \times R}{100} = \frac{P_2 R}{100}$

$SI_2 = \frac{P_2 R}{100}$

$= P_1\left(1 + \frac{R}{100}\right)\frac{R}{100}$

$SI_2 = \frac{P_1 R}{100}\left(1 + \frac{R}{100}\right)$

दूसरे वर्ष के अन्त में मिश्रधन

$A_2 = P_2 + SI_2$

$= P_1\left(1 + \frac{R}{100}\right) + \frac{P_1 R}{100}\left(1 + \frac{R}{100}\right)$

$= P_1 \; 1 + \left(\frac{R}{100}\right) \; 1 + \left(\frac{R}{100}\right)$

$= P_1\left(1 + \frac{R}{100}\right)^2 = P_3$

(P_3 तीसरे वर्ष का मुलधन)

इसी प्रकार तीसरे वर्ष के लिए

$$SI_3 = \frac{P_3 x\ T\ x\ R}{100}$$

$$= \frac{P_3 x\ 1\ x\ R}{100}$$

$$= \frac{P_3 R}{100}$$

$$A_3 = P_3 + SI_3$$

$$= P_3 + \frac{P_3 R}{100}$$

$$= P_3 \left(1 + \frac{R}{100}\right)$$

$$= P_1 \left(1 + \frac{R}{100}\right)\left(1 + \frac{R}{100}\right)\left(1 + \frac{R}{100}\right)$$

$$= P_1 \left(1 + \frac{R}{100}\right)^3$$

n वर्ष के बाद R% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से

मिश्रधन $=P_1 \left(1+\frac{R}{100}\right)^n$ होगा।

चक्रवृद्धि ब्याज $\boxed{CI = A - P}$

अर्थात् R% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से n वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज

$$\boxed{CI = P_1 \left(1+\frac{R}{100}\right)^n - P_1}$$

करो और सीखो

संदीप ने गोबर गैस प्लांट लगाने के लिए बैंक से 3000 रूपये 2 वर्ष के लिए 8% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज दर पर उधार लिए यदि ब्याज वार्षिक संयोजित होता है तो पता लगाओ ?

(i) दो वर्ष बाद 8% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज दर से कुल कितना धन लौटाना होगा ?

(ii) चक्रवृद्धि ब्याज कितना हुआ ?

(iii) यदि यह धन सरल ब्याज से उधार लिया जाता तो ब्याज कम देना पड़ता अथवा ज्यादा और कितना ?

सुमन– गुरूजी, सवाल में दर के बाद ब्याज वार्षिक संयोजित होता हैं लिखा है इसका भी कोई अर्थ है?

शिक्षक– हाँ! इसका अर्थ है, तुमने अलग अलग पास बुकों के अवलोकन (बैंक, पोस्ट आफिस के बचत बैंक की पास बुकों) से महसूस किया होगा दर का संयोजन वार्षिक, अर्द्धवार्षिक एवं तिमाही संयोजन भी किया जाता है। यह रूपांतरण अवधि कहलाती है।

सुमन– रूपांतरण अवधि क्या होती है गुरूजी ?

शिक्षक– वह समय अवधि जिसके पश्चात प्रत्येक बार नया मूलधन बनाने के लिए ब्याज जोड़ा जाता है रूपांतरण अवधि कहलाती है।

सुमन– गुरूजी जब ब्याज प्रति छः माह में जोड़ा जाता है तब रूपांतरण अवधि दो होगी तथा ब्याज त्रैमासिक जोड़ा जाता है तो रूपांतरण अवधि चार होगी ना।

शिक्षक– हाँ ऐसी स्थिति में दर में भी बदलाव होगा।

सुमन– क्यों गुरूजी?

शिक्षक– देखो 100 रूपये पर एक वर्ष का ब्याज 8 रूपये हो तो छः माह में कितना हुआ, तीन माह में कितना हुआ सोचो ?

सुमन– हाँ समझ गई छः माह में आधा यानि 4 रूपये तथा तीन माह में चौथाई यानि 2 रूपये।

करो और सीखो

निम्न तालिका में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

ब्याज संयोजन की शर्त	समय वर्षों में	दर वार्षिक	रूपांतरण अवधि	रूपांतरण दर
वार्षिक	2	10%	2	10%
अर्द्धवार्षिक	$1\frac{1}{2}$	6%	- - -	3%
त्रैमासिक	$1\frac{1}{4}$	8%	5	- - -
अर्द्धवार्षिक	2	14%	4	- - -
वार्षिक	1	7%	- - -	- - -
त्रैमासिक	छः माह	16%	- - -	- - -

सुमन– इसका अर्थ हुआ चक्रवृद्धि ब्याज के लिए सूत्र

$$CI = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n - P$$

CI = चक्रवृद्धि ब्याज, P = मूलधन, R = रूपांतरित दर तथा n = रूपांतरित अवधि

शिक्षक– बिलकुल ठीक पर ब्याज संयोजन की शर्त वार्षिक हो तो समय और दर में बदलाव नहीं होगा।

उदाहरण 8 ब्याज संयोजन की शर्त अर्द्धवार्षिक हो और 10,000 रूपये 1 वर्ष के लिए उधार लिए जाएँ तो 14% वार्षिक ब्याज दर से कुल कितना धन वापस लौटाना होगा?

हल ब्याज संयोजन की शर्त अर्द्धवार्षिक है अतः समय को दुगना और दर को आधा करने पर रूपांतरण अवधि n = 1 x 2 = 2 एवं रूपांतरण दर = $\frac{14}{2}$ = 7% अर्द्धवार्षिक

$$\text{मिश्रधन} = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$$

$$= 10{,}0\,00\left(1+\frac{7}{100}\right)^2 = 10{,}000\left(\frac{107}{100}\right)\left(\frac{107}{100}\right)$$

= 11449 रूपये

अतः एक वर्ष बाद 11449 रूपये वापस चुकाने पड़ेंगे।

उदाहरण 9 20,000 रूपये की राशि 1 वर्ष 6 माह के लिए 8% वार्षिक दर से निवेश करने पर कुल कितना धन प्राप्त होगा। जबकि ब्याज वार्षिक संयोजित होता है।

हल समय को वर्षों में बदलने पर समय = 1 वर्ष + 6 माह

= 1 वर्ष + $\frac{6}{12}$ माह = $1\frac{1}{2}$ वर्ष

ब्याज संयोजन की शर्त वार्षिक है अतः समय तथा दर में कोई बदलाव नहीं होगा।

यमन ने सूत्र में मान रखकर ऐसे लिखा–

$$A = 20000\left(1+\frac{8}{100}\right)^{1\frac{1}{2}}$$

भिन्न के रूप में घात है, कैसे हल करूँ ?

शिक्षक– पहले एक वर्ष के लिए 8% की दर से इसके प्राप्त धन को मूलधन समझकर अगले आधे वर्ष के लिए दर आधी यानि 4% से गणना कर लो।

यमन – ऐसे गुरूजी,

$$A = 20000\left(\frac{108}{100}\right)\left(\frac{104}{100}\right)$$

= 2 x 108 x 104 = 22464 रूपये

13.5 वृद्धि दर पर आधारित व्यावहारिक समस्याएँ

सुमन चक्रवृद्धि ब्याज के सवाल हल करते करते सोचने लगी कि पिछली कक्षा में प्रतिशत वृद्धि दर के सवाल भी चक्रवृद्धि के सूत्र से कर सकती हूँ ? यह बात उसने शिक्षक से पूछी सुमन – क्या प्रतिशत में वृद्धि दर के सवाल भी चक्रवृद्धि ब्याज के सूत्र के उपयोग से हल कर सकती हूँ ?

शिक्षक– हाँ तुम इस सूत्र का उपयोग इन परिस्थितियों में भी कर सकती हो–

(i) जनसंख्या में वृद्धि (अथवा ह्रास)

(ii) यदि बैक्टीरिया वृद्धि की दर ज्ञात है तो वृद्धि ज्ञात करना।

(iii) किसी वस्तु का मान ज्ञात करना यदि मध्यवर्ती वर्षों में इसके मूल्य में वृद्धि अथवा कमी होती है।

उदाहरण 10 योग केन्द्र पर आने वाले विद्यार्थियों की संख्या में प्रतिवर्ष 20% वृद्धि का लक्ष्य रखा गया था। यदि वर्ष 2014 में यह संख्या 300 थी तो वर्ष 2016 में लक्ष्य पूर्ति होने पर केन्द्र में कितने विद्यार्थी होंगे ?

हल प्रारम्भिक संख्या = 300

वृद्धि दर = 20%

समयावधि n = 2 वर्ष

2 वर्ष बाद विद्यार्थियों की संख्या = प्रारम्भिक मान $\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$

$$=300\left(1+\frac{20}{100}\right)^2$$

$$= 300 \times \frac{120}{100} \times \frac{120}{100} = 432 \text{ रू.}$$

उदाहरण 11 एक जिले में वर्ष 2014 में सड़क दुर्घटनाओं की संख्या 3000 थी। सड़क सुरक्षा के प्रयास के कारण हुई जागरूकता से प्रति वर्ष दुर्घटना में 15% कमी हुई तो 2016 में कितनी सड़क दुर्घटनाएँ हुई ?

हल प्रारंभिक मान 8000, दर 15% (कम होने से दर ऋणात्मक)

अवधि = 2 वर्ष, दो वर्ष बाद का मान = ?

वर्ष 2016 में सड़क दुर्घटनाओं की संख्या= प्रारंभिक मान $\left(1+\frac{-R}{100}\right)^n$

$$= 8000\left(1+\frac{-15}{100}\right)^2$$

$$= 8000\left(1-\frac{15}{100}\right)^2$$

$$= 8000 \times \frac{85}{100} \times \frac{85}{100} = 5780 \text{ रू.}$$

उदाहरण 12 किसी शहर में मलेरिया फैल रहा है। इसकी रोकथाम हेतु फोगिंग, कैरोसीन छिड़काव पानी ठहराव को हटाकर गाय के गोबर से लिपाई, DDT छिड़काव इत्यादि के प्रभाव से प्रति सप्ताह मलेरिया के मरीजों की संख्या में 5% कमी आई यदि इस सप्ताह मलेरिया के मरीजों की संख्या 6859 है तो तीन सप्ताह पूर्व मलेरिया के कितने मरीज रहे होंगे ?

हल दर (R) = -5% प्रति सप्ताह, माना प्रारंभिक मान = x

अवधि n= 3 सप्ताह, अंतिम सप्ताह में मरीजों की संख्या = 6859

अंतिम मान = प्रारंभिक मान $\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$

$$6859 = x\left(1-\frac{5}{100}\right)^3$$

$$= x \times \frac{95}{100} \times \frac{95}{100} \times \frac{95}{100}$$

$$\frac{6859 \times 100 \times 100 \times 100}{95 \times 95 \times 95} = x$$

$$\frac{6859 \times 20 \times 20 \times 20}{19 \times 19 \times 19} = x$$

$$x = 8000$$

अतः तीन सप्ताह पूर्व मलेरिया के 8000 मरीज थे।

प्रश्नावली 13.3

1. एक शहर में लगे पुस्तक मेले में पहले दिन देखने वालों की संख्या 3000 थी वह अगले दिन बढ़कर 3600 तक पहुँच गई तो मेला देखने वालों की वृद्धि दर ज्ञात कीजिए।
2. एक टेलीविजन का मूल्य 30,000 रूपये है वस्तु का मूल्य प्रति वर्ष 20% से घटता (अवमूल्यन) है तो 2 वर्ष बाद वस्तु का मूल्य ज्ञात कीजिए।
3. कपिल ने एक स्कूटर खरीदने के लिए किसी बैंक से 52800 रूपये 12% वार्षिक दर से ऋण लिया जबकि ब्याज वार्षिक संयोजित होता है। 1 वर्ष 6 माह के अंत में ऋण चुकता करने के लिए उसे कितनी राशि का भुगतान करना पड़ेगा।
4. वर्ष 2013 में सड़क दुर्घटना की संख्या 10,000 थी। यातायात पुलिस द्वारा सड़क पर दुर्घटना घटित नहीं हो इसके प्रचार प्रसार के माध्यम से लोगों में जागरूकता अभियान चलाने पर 20% की कमी पाई गई तो 2015 में सड़क दुर्घटना की संख्या क्या रही ?
5. 10,000 रूपये का 2 वर्ष के लिए 8% वार्षिक दर से चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए यदि ब्याज वार्षिक संयोजित होता है।
6. पायल ब्यूटीपार्लर के लिए 12,000 रूपये का ऋण राष्ट्रीयकृत बैंक से लेती है। 2 वर्ष 6 माह बाद 14% वार्षिक दर से कितना धन लौटाएगी ? जबकि ब्याज वार्षिक संयोजित होता है।
7. 18000 रूपये 10% वार्षिक ब्याज की दर से $1\frac{1}{2}$ वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए, जबकि ब्याज अर्द्धवार्षिक देय है।
8. विष्णु ने 14% वार्षिक दर पर 80,000 रूपये का निवेश किया यदि ब्याज अर्द्धवार्षिक संयोजित होता हैं तो ज्ञात कीजिए कि उसे कुल कितनी राशि प्राप्त होगी? यदि समय (i) 6 माह हो। (ii) 1 वर्ष हो।

9. खुशवंत ने 12,500 रूपये 3 वर्ष के लिए 5% वार्षिक दर से साधारण ब्याज पर उधार लिया। यदि यही राशि 5% वार्षिक दर से चक्रवृद्धि ब्याज पर उधार ली हो, तो खुशवंत को कुल कितनी अधिक राशि का भुगतान करना पड़ेगा।

13.6 सीधा एवं प्रतिलोम संबंध की समझ एवं इस पर आधारित समस्याएँ

छात्रावास में पुताई का कार्य चल रहा था। दो मजदूरों द्वारा 2 दिन में 3 कमरों की पुताई की गई। छात्रावास में सभी कमरे एक ही नाप के कुल 18 कमरे हैं। पुताई कार्य पर बच्चे आपस में चर्चा कर रहे हैं।

महावीर– 2 दिन में 3 कमरों की पुताई हुई है तो 18 कमरों में लगने वाले समय की गणना करते हैं।

गुरूमीत– दिनों की संख्या कार्य की मात्रा पुताई किए गए कमरों की संख्या

दिनों की संख्या	कार्य की मात्रा पुताई किए गए कमरों की संख्या
2 ↓	3 ↓
x	18

यहाँ दिनों की संख्या तथा कार्य की मात्रा में समानुपाती सन्बन्ध है अर्थात् मजदूरों की संख्या समान रहे तो समय बढ़ाने पर कार्य की मात्रा भी उसी अनुपात में बढ़ती है।

$$2 : x :: 3 : 18$$

बाह्य पदों का गुणनफल = मध्य पदों का गुणनफल

$$2 \times 18 = 3x$$

$$\frac{2 \times 18}{3} = x$$

$$x = 12$$

महावीर– हाँ यह सही है पूरे छात्रावास (यानि 18 कमरों की) की 12 दिन में पुताई कर देंगे।

गुरूमीत– तो क्या मजदूरों की संख्या तथा कार्य पूर्ण होने में लगे समय में भी कोई संबंध है।

महावीर– मुझे तो लगता है कि ज्यादा मजदूर होंगे तो काम जल्दी पूरा होगा। चलो अध्यापक जी से पूछते हैं।

गुरूमीत– गुरूजी, संख्या तथा कार्य पूर्ण होने में लगे मजदूरों की और दिनों की संख्या में सीधा सम्बन्ध है।

शिक्षक– हाँ ! सीधा सम्बन्ध है।

दो चरों में सम्बन्ध इस प्रकार होते हैं कि एक चर के बढ़ाने से दूसरा चर बढ़ता है तथा घटाने पर घटता है। परन्तु कभी–कभी एक चर के बढ़ाने पर दूसरा चर घटता है तथा पहले चर को घटाने पर दूसरा चर बढ़ जाता है वह सम्बन्ध प्रतिलोम सम्बन्ध होता है।

करो और सीखो

1 निम्नलिखित कथनों को पढ़कर पता करो कि यह सीधा/प्रतिलोम सम्बन्ध है।

क्रम संख्या	कथन	सम्बन्ध
01	एक सीढ़ी दीवार के सहारे सरक रही है सीढ़ी के ऊपर शीर्ष की तल से ऊँचाई तथा नीचे से शीर्ष की दीवार से दूरी में	प्रतिलोम सम्बन्ध है।
02	नियत चाल से चल रही कार द्वारा तय की गई दूरी तथा समय में	....
03	व्यक्तियों की संख्या तथा भोजन सामग्री की पर्याप्तता दिनों में (जब कि भोजन सामग्री की मात्रा नियत है)	....
04	पानी की टंकी से गाँव की जनसंख्या में (जब पानी की मात्रा और वितरण समान हो)	....

2. आप ऐसे ही सीधे तथा प्रतिलोम सम्बन्ध वाले उदाहरणों को सोचिए तथा अपने साथियों से चर्चा कीजिए।

उदाहरण 13 एक खेत में गुड़ाई का काम 4 मजदूर 8 दिन में पूरा करते हैं। यदि यह कार्य 2 दिन में पूरा कराना हो तो कितने मजदूर चाहिए।

हल यहाँ मजदूरों की संख्या तथा कार्य पूर्ण करने में लगे समय के मध्य प्रतिलोम (व्युत्क्रम) सम्बन्ध हैं।

मजदूरों की संख्या	कार्य पूर्ण करने में लगा समय (दिनों में)
↓ 4	8 ↑
x	2

माना x मजदूरों की आवश्यकता होगी।

$$4 : x :: 2 : 8 \quad \text{(प्रतिलोम सम्बन्ध होने से)}$$

बाह्य पदों का गुणनफल = मध्य पदों का गुणनफल

$$4 \times 8 = 2x$$

$$\frac{4 \times 8}{2} = x$$

$$16 = x$$

अतः 2 दिन में कार्य पूर्ण करने हेतु 16 मजदूरों की जरूरत होगी।

उदाहरण 14 धर्मेश कार द्वारा डूँगरपुर से जालोर जाना चाहता है।

(i) यदि कार को 90 किमी चलने में 5 लीटर पेट्रोल की आवश्यकता हो तो 20 लीटर पेट्रोल में कितनी दूरी तय करेगी।

(ii) जाते समय 60 किमी प्रति घंटा की औसत चाल से चलकर 6 घन्टे में डूँगरपुर से जालौर पहुँचती है। वापस लौटते समय कार की औसत चाल क्या रही होगी यदि उसे $4\frac{1}{2}$ घन्टे लगे ।

हल (i) वाहन द्वारा तय की गई दूरी (किमी) तथा ईधन की मात्रा (लीटर) में सीधा सम्बन्ध है।

तय की गई दूरी (किमी) ↓	ईंधन की मात्रा (लीटर में) ↓
90	5
x	20

माना x किमी दूरी तय करेगा।

$$90 : x :: 5 : 20$$

बाह्य पदों का गुणनफल = मध्य पदों का गुणनफल

$$90 \times 20 = 5x$$

$$\frac{90 \times 20}{5} = x$$

$$360 \text{ किमी} = x$$

अतः 20 लीटर पेट्रोल से वह कार 360 किमी दूरी तय कर पाएगी।

(ii) वाहन की औसत चाल एवं समय में प्रतिलोम सम्बन्ध है।

वाहन की औसत चाल (किमी प्रति घण्टा) ↓	नियत दूरी तय करने मे लगा समय (घण्टों में) ↑
60	6
x	$4\frac{1}{2}$

माना लौटते समय कार की औसत चाल x किमी प्रतिघण्टा

अतः $60 : x :: 4\frac{1}{2} : 6$

या $60 : x :: \frac{9}{2} : 6$

बाह्य पदों का गुणनफल = मध्य पदों का गुणनफल

$$60 \times 6 = \frac{9}{2} x$$

$$\frac{\overset{20}{\cancel{60}} \times \overset{2}{\cancel{6}} \times 2}{\underset{3}{\cancel{9}}} = x \qquad x = 80$$

लौटते समय कार की औसत चाल 80 किमी प्रति घण्टा रही होगी।

प्रश्नावली 13.4

1. विमला 200 किमी की दूरी को बस से तय करती है जिसका किराया 180 रू. देती है 500 किमी की यात्रा करने पर उसे कितना किराया देना होगा ?
2. 10 मीटर के पेड़ की छाया प्रातः काल 18 मीटर है इसी समय 120 मीटर ऊँचे टॉवर की छाया कितनी होगी ?
3. यदि 5 पुस्तकों का वजन 2.5 किग्रा हो तो 30 किग्रा कितनी पुस्तकों का वजन होगा ?
4. एक बस 45 किमी प्रति घण्टे की समान चाल से चल रही है तो 225 किमी की दूरी तय करने में बस को कितना समय लगेगा ?
5. ममता 15 लीटर पानी से 30 परिण्डे भर सकती है तो बताइए 120 परिण्डों को भरने के लिए कितने लीटर पानी की आवश्यकता होगी ?
6. 5 कारों को नल से धुलाई करने के स्थान पर, जग व बाल्टी से धुलाई करने पर 100 लीटर पानी की बचत की जा सकती है तो इसी प्रकार 20 कारों की धुलाई करने में कितने लीटर पानी की बचत की जा सकती है ?
7. विद्यालय के चारों ओर पक्की दीवार बनाने के लिए 9 कारीगरों को पूरा करने में 16 दिन का समय लगा। यदि कारीगरों की संख्या 12 होती तो दीवार कितने दिनों में बन जाती ?
8. एक शिविर में 40 सैनिकों के लिये 20 दिन के लिए भोजन सामग्री है। 5 दिन बाद 10 सैनिक और आ गए तो शेष सामग्री कितने दिनों तक पर्याप्त रहेगी ?
9. स्वच्छ भारत अभियान के तहत 15 स्वयंसेवक अपने गाँव को 4 दिन में स्वच्छ कर सकते हैं। यदि गाँव को 3 दिन में स्वच्छ करना होता तो कितने स्वयंसेवकों की आवश्यकता होती ?
10. विद्यालय में छात्र श्रमदान के अन्तर्गत 12 विद्यार्थी, 5 घण्टे सफाई करते हैं उसी भाग की सफाई 3 घण्टे में करवानी होती तो कितने विद्यार्थी कार्य करेंगे।
11. माधु अपने गोबर गैस प्लांट में 80 किग्रा गोबर डालने से बनने वाली गोबर गैस से 12 दिन तक भोजन बनाते हैं तो माधु को 60 दिन तक भोजन बनाने के लिए कितने किग्रा गोबर की आवश्यकता होगी?

हमने सीखा

1. अंकित मूल्य पर दी गई छूट बट्टा कहलाती है।
   बट्टा = अंकित मूल्य – विक्रय मूल्य
2. प्रतिशत बट्टा = $\dfrac{\text{बट्टा}}{\text{अंकित मूल्य}} \times 100$

3. किसी वस्तु को खरीदने के बाद उस पर किए गए अतिरिक्त खर्चे क्रय मूल्य में शामिल कर लिए जाते हैं, ये खर्चे ऊपरी खर्चे कहलाते हैं।
   वास्तविक क्रय मूल्य = खरीद मूल्य + ऊपरी खर्च
4. किसी वस्तु को बेचने पर सरकार द्वारा वैट (VAT) लिया जाता है। इसे बिल की राशि में जोड़ दिया जाता है।
5. सरल ब्याज = मूलधन x समय x $\frac{\text{दर}}{100}$

   मिश्रधन = मूलधन + ब्याज
6. पिछले वर्ष की कुल राशि (A= P + I) पर परिकलित किया गया ब्याज चक्रवृद्धि ब्याज कहलाता है।
7. (i) जब ब्याज वार्षिक संयोजित होता है तो?

   कुल राशि $(A) = P\left(1 + \frac{R}{100}\right)^n$, जहाँ P मूलधन, R ब्याज की दर और n समय है।

   (ii) जब ब्याज अर्द्धवार्षिक संयोजित होता है तो

   कुल राशि $= P\left(1 + \frac{R}{200}\right)^{2n}$ जहाँ $\frac{R}{2}$ ब्याज की अर्द्धवार्षिक

   2n = छः माही (अर्द्धवर्षों) की संख्या।
8. जब दो राशियाँ इस प्रकार संबंधित हों कि एक का मान बढ़ने या घटने पर दूसरे का मान भी उसी अनुपात में बढ़ या घट जाता है तो वे समानुपाती (सीधा) कहलाती है।

9. जब दो राशियाँ इस प्रकार संबंधित हों कि एक का मान बढ़ने या घटने पर दूसरे का मान भी उसी अनुपात में क्रमशः घट या बढ़ जाता है तो वे व्युत्क्रमानुपाती (प्रतिलोम) कहलाती है।

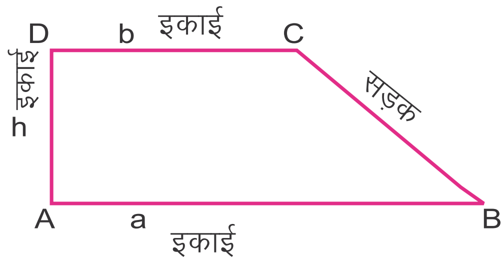
अध्याय 14

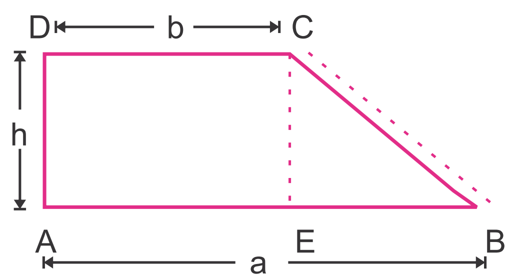
क्षेत्रफल

14.1 हम पूर्व में चतुर्भज तथा इसके विभिन्न प्रकारों तथा उनका क्षेत्रफल ज्ञात करने की विधियों से परिचित हो चुके हैं। इस अध्याय में हम चतुर्भुजों के कुछ और प्रकारों (समलम्ब, समचतुर्भुज तथा सामान्य चतुर्भज) के क्षेत्रफल ज्ञात करने की विधियों पर चर्चा करेंगे।

14.2 समलम्ब चतुर्भुज

नीचे दिए गए भूखण्ड के आकार पर विचार कीजिए। इस भूखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए क्या युक्ति लगानी होगी? आदित्य इस भूखण्ड की दो समान्तर भुजाओं को देख कर एक समलम्ब चतुर्भुज की कल्पना करता है। ऐसा चतुर्भुज जिसमें सम्मुख भुजा का एक युग्म समान्तर हो, **समलम्ब चतुर्भुज** कहलाता है।





वह पूरे भूखण्ड को दो ऐसे भागों (आकृतियों) में विभक्त करता है जिन आकृतियों (आयत तथा त्रिभुज) का क्षेत्रफल ज्ञात करने के तरीकों से वह पूर्व में परिचित है।

सम्पूर्ण भूखण्ड का क्षेत्रफल = आयत AECD का क्षे. + त्रिभुज ECB का क्षे.

$$= (AE \times AD) + \frac{1}{2} \times (EB \times EC)$$

[EC = AD तथा AE = DC है]

आकृति ABCD का क्षे. $= (AE \times AD) + \frac{1}{2} \times (EB \times AD)$

$$\because = \left[AE + \frac{1}{2} EB\right] \times AD$$

$$= \left(\frac{2AE + EB}{2}\right) \times AD$$

$$= \left(\frac{AE + AE + EB}{2}\right) \times AD$$

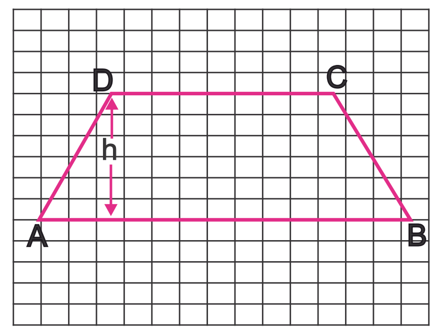
$$= \left(\frac{(AE+EB)+AE}{2}\right) \times AD$$

$$= \left(\frac{AB+CD}{2}\right) \times AD$$

$$= \frac{1}{2}[a+b] \times h$$ (जहाँ a व b समान्तर भुजाएँ हैं।)

अतः समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ x (समान्तर भुजाओं का योग) x ऊँचाई

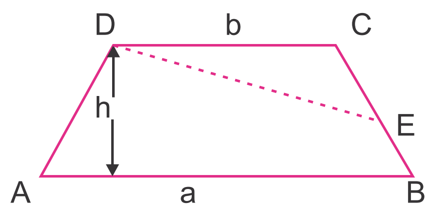
गतिविधि समलम्ब चतुर्भुज के क्षेत्रफल को एक क्रियाकलाप से ज्ञात करते हैं। जिसके चरण निम्न हैं–



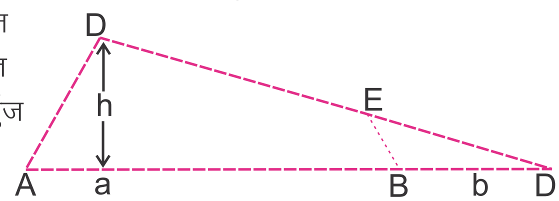
(1) ग्राफ पेपर पर किसी भी माप का एक समलंब चतुर्भुज चित्रानुसार खींचिए तथा उसे काटकर बाहर निकालिए।

(2) BC भुजा का मध्य बिन्दु E ज्ञात कीजिए तथा इसे D से मिलाकर चित्रानुसार बिन्दु रेखा के सहारे काटिए।

(3) काटे गए △ DEC को ऐसे रखिए कि C बिन्दु B पर आए। इस प्रकार बने बड़े त्रिभुज के आधार की लम्बाई क्या होगी ? यदि ऊँचाई h हो, तो त्रिभुज का क्षे0 $= \frac{1}{2}(a+b) \times h$ होगा।



क्या त्रिभुज तथा काटे गए समलम्ब चतुर्भुज ABCD के क्षेत्रफल समान होंगे ? इस प्रकार प्राप्त त्रिभुज के क्षेत्रफल वाले व्यंजक का समलम्ब चतुर्भुज के क्षेत्रफल के लिए व्यंजक क्या होगा ?

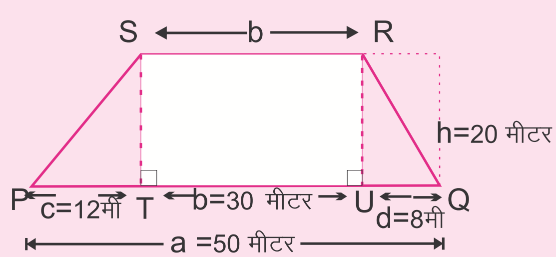


करो और सीखो

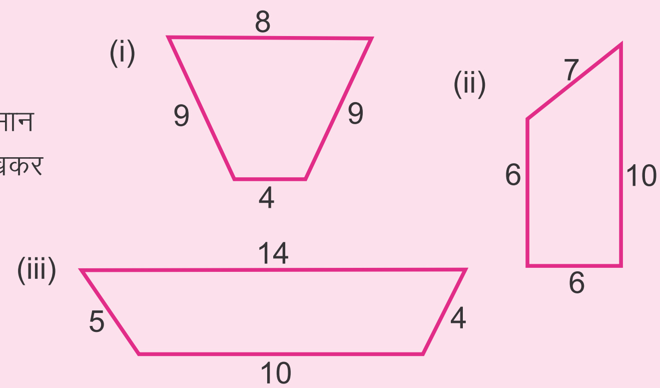
1.अजहर के पास समलम्ब चतुर्भुज के आकार का एक खेत है (चित्रानुसार) वह इसे तीन अलग–अलग भागों में बाँटकर देखता है। यदि खेत के विभिन्न भागों की माप चित्रानुसार दी गई हो तो प्रत्येक भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कर दशाईए कि समलम्ब चतुर्भुज PQRS का क्षेत्रफल

= △SPT का क्षेत्रफल + आयत STUR का क्षेत्रफल +△ RUQ का क्षेत्रफल होता है।

एवं समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}(a+b) \times h$ में मान रख तुलना कीजिए।

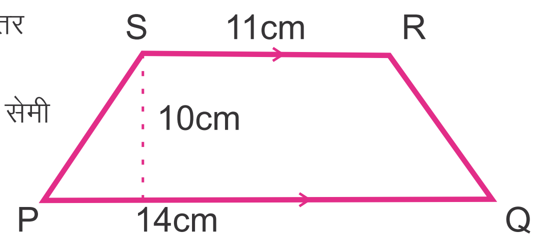


2. क्या विभिन्न परिमापों वाले समलम्ब चतुर्भुज, क्षेत्रफल में समान होते हैं ? दी गयी मापों को देखकर तथ्य को स्थापित कीजिए।



उदाहरण 1 चित्र में दिए गए समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल क्या होगा ?

हल ∵ समलम्ब चतुर्भुज PQRS की समान्तर भुजाएँ क्रमशः PQ = 14 सेमी तथा SR = 11 सेमी है। ऊँचाई h = 10 सेमी दी गई है।



समलम्ब चतुर्भुज PQRS का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ x (समान्तर भुजाओं का योग) x ऊँचाई

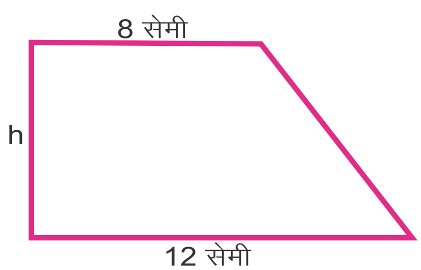
$= \frac{1}{2}(14 + 11) \times 10$ वर्ग सेमी

$= \frac{1}{2} \times 25 \times 10 = 125$ वर्ग सेमी

उदाहरण 2 एक समलम्ब चतुर्भुज की दो समान्तर भुजाएँ क्रमशः 12 सेमी तथा 8 सेमी की हैं। यदि उसका क्षेत्रफल 60 वर्ग सेमी हो, तो समलम्ब चतुर्भुज की ऊँचाई क्या होगी ?

हल माना समलम्ब चतुर्भुज की ऊँचाई = h सेमी

सूत्रानुसार समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ (समान्तर भुजाओं का योग) x ऊँचाई



$60 = \frac{1}{2} \times (12 + 8) \times h$

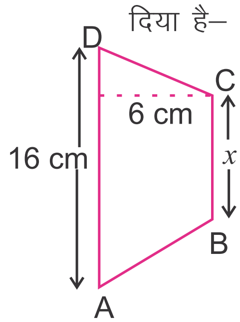
$h = \frac{60 \times 2}{20} = 6$ सेमी

अतः ऊँचाई = 6 सेमी

उदाहरण 3 चित्रानुसार एक समलम्ब चतुर्भुज ABCD की भुजाओं की माप दी गई है। यदि इसका क्षेत्रफल 78 वर्ग सेमी हो तो x का मान ज्ञात कीजिए।

हल चूंकि AD तथा BC समान्तर भुजाएँ हैं।

दिया है– चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = 78 cm^2



$\frac{1}{2}$ x (समान्तर भुजाओं का योग) x ऊँचाई = क्षेत्रफल

$\frac{1}{2} \times (16 + x) \times 6 = 78$

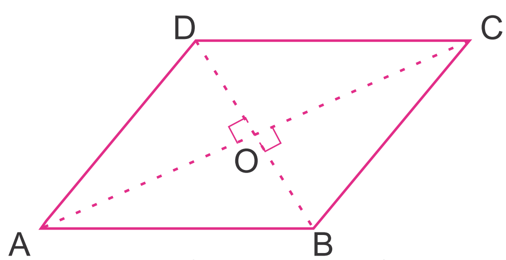
$16 + x = \frac{78 \times 2}{6}$ या $16 + x = 26$

या $x = 26 - 16 = 10$ सेमी **उत्तर**

14.3 समचतुर्भुज का क्षेत्रफल

हम अध्ययन कर चुके हैं कि ऐसा चतुर्भुज जिसकी चारों भुजाओं की माप समान हो, समचतुर्भुज कहलाता है। समचतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

आइए हम एक समचतुर्भुज का उदाहरण लेकर उसका क्षेत्रफल ज्ञात करते हैं।



चित्रानुसार ABCD एक सम चतुर्भुज है जिसके विकर्ण AC की लम्बाई d_1 तथा BD की लम्बाई d_2 है। ये दोनों विकर्ण एक दूसरे को o बिन्दु पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

सम चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = △ABC का क्षेत्रफल + △ACD का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} \times AC \times OB + \frac{1}{2} \times AC \times OD$ ($\because$ OB तथा OD क्रमशः △ABC एवं △ADC की ऊँचाइयाँ हैं।)

$= \frac{1}{2} \times AC \times [OB + OD]$

$= \frac{1}{2} \times AC \times BD$ [$\because OB + OD = BD$]

$= \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$

अत : सम चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ x विकर्णों का गुणनफल

दूसरे शब्दों में समचतुर्भुज का क्षेत्रफल उसके विकर्णों के गुणनफल का आधा होता है।

चूंकि समचतुर्भुज भी एक समान्तर चतुर्भुज है। अतः समचतुर्भुज की भुजा तथा उसकी ऊँचाई के मान ज्ञात होने पर

समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार x ऊँचाई

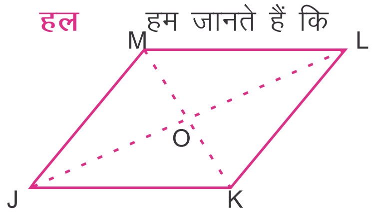
उदाहरण 4 किसी समचतुर्भुज के विकर्ण क्रमशः 10 सेमी तथा 12 सेमी हैं। उसका क्षेत्रफल क्या होगा ?

हल ∵ समचतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ विकर्णों का गुणनफल

$= \frac{1}{2} \times 10 \times 12 \quad = 60$ सेमी^{2} उत्तर

उदाहरण 5 चित्रानुसार एक समचतुर्भुज JKLM का क्षेत्रफल 140 वर्ग सेमी है यदि इसका विकर्ण KM = 14 सेमी हो तो OL की माप क्या होगी ?

हल हम जानते हैं कि



समचतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ विकर्णों का गुणनफल

दिया है– समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = 140 वर्ग सेमी

$140 = \frac{1}{2} \times 14 \times JL$

$JL = \frac{140 \times 2}{14} = 20$ सेमी

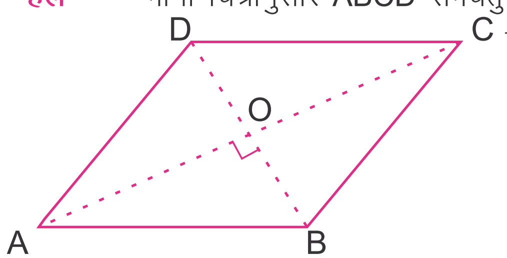
चूंकि समचतुर्भुज के विकर्ण प्रतिच्छेदन बिन्दु पर समद्विभाजित होते हैं। अतः

$OL = \frac{1}{2} \times JL$

$= \frac{1}{2} \times 20 = 10$ सेमी **उत्तर**

उदाहरण 6 किसी समचतुर्भुजाकार खेल के मैदान का क्षेत्रफल 21600 वर्गमीटर है। रोहन इस खेल के मैदान में जब बड़े विकर्ण के अनुदिश चलता है तो उसे 240 मीटर चलना पड़ता है। इस मैदान की भुजाओं के अनुदिश एक पूरा चक्कर लगाने मे तय दूरी ज्ञात कीजिए।

हल माना चित्रानुसार ABCD समचतुर्भुजाकार खेल का मैदान है।



दिया है– मैदान का क्षेत्रफल = 21600 वर्गमीटर

तथा विकर्ण AC = 240 मीटर

हम जानते हैं कि–

समचतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ विकर्णों का गुणनफल

$21600 = \frac{1}{2} \times 240 \times BD$

$BD = \frac{21600 \times 2}{240} = 180$ मीटर

∵ समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लम्ब समद्विभाजित होते हैं।

अतः $AO = \frac{1}{2} AC = 120$ मीटर तथा $BO = \frac{1}{2} BD = 90$ मीटर

अब चूंकि $\triangle AOB$ एक समकोण त्रिभुज है। बोधायन प्रमेय से $\triangle AOB$ का विकर्ण AB

$AB = \sqrt{(AO)^2 + (BO)^2}$

$= \sqrt{(120)^2 + (90)^2} = 150$ मीटर

अर्थात समचतुर्भुजाकार मैदान की भुजा = 150 मीटर

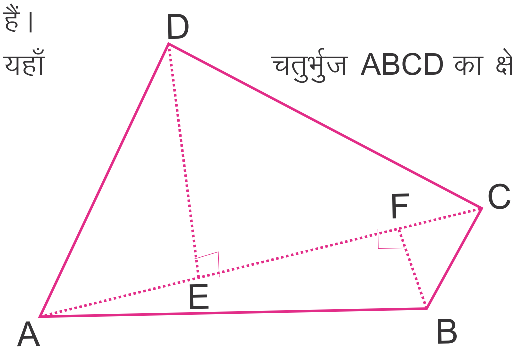
अतः भुजाओं के अनुदिश मैदान का चक्कर पूरा लगाने में तय दूरी

= खेल मैदान का परिमाप = 4 x भुजा = 4 x 150 = 600 मीटर

14.4 चतुर्भुज का क्षेत्रफल

चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए उसका कोई एक विकर्ण खींचकर चतुर्भुज को दो त्रिभुजाकार भागों में विभक्त करते हैं तथा शेष दोनों शीर्षों से इस विकर्ण पर चित्रानुसार लम्ब डालते हैं।

यहाँ



चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = △ ABC का क्षेत्रफल +△ ADC का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2}$ (AC X BF) + $\frac{1}{2}$ (AC x DE)

$= \frac{1}{2}$ AC (BF + DE)

$= \frac{1}{2} d(h_1 + h_2)$

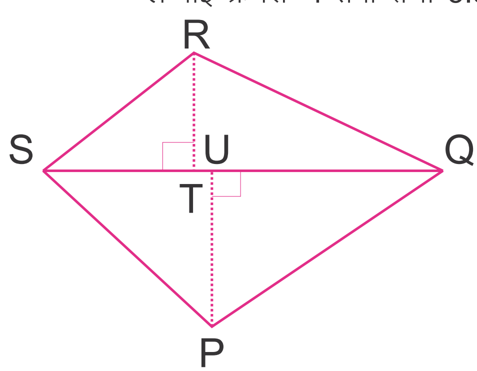
जहाँ d = विकर्ण AC की लम्बाई

h_1= शीर्ष लम्ब BF की लम्बाई

h_2= शीर्ष लम्ब DE की लम्बाई

> चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ x विकर्ण x (विकर्ण पर शेष शीर्षों से डाले गए लम्बों का योग)

उदाहरण 7 एकचतुर्भुज PQRS में विकर्ण SQ की लम्बाई 8 सेमी तथा शीर्षलम्ब RT तथा UP की लम्बाई क्रमशः 4 सेमी तथा 5.5 सेमी है। इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



हल चतुर्भुज PQRS का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2}$ x विकर्ण x (विकर्ण पर डाले गए लम्बों का योग)

$= \frac{1}{2}$ x 8 x (4+ 5.5)

$= \frac{1}{2}$ x 8 x 9.5

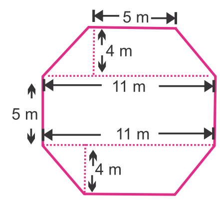
= 38 सेमी^{2}

प्रश्नावली 14.1

1. एक समलम्ब चतुर्भुज जिसकी दो समान्तर भुजाओं की माप 10 सेमी तथा 16 सेमी तथा उनके बीच की दूरी 8 सेमी है तो समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
2. किसी भवन की छत पर चित्रानुसार डिजाइन लगी है यदि सभी डिजाइन समान माप की हों तो सम्पूर्ण डिजाइन का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

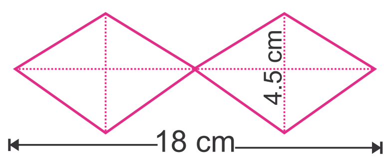
3. एक समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल $34cm^2$ है, और उसकी ऊँचाई 4cm है। समान्तर भुजाओं में से एक भुजा की लम्बाई 10cm है। दूसरी समान्तर भुजा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

4. किसी चबूतरे का ऊपरी पृष्ठ चित्रानुसार अष्टभुज के आकार का है। इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



5. किसी समचतुर्भुजाकार प्लॉट के सम्मुख शीर्षों के मध्य की दूरियाँ क्रमशः 12.5 मीटर तथा 10.4 मीटर है। इस प्लाट को समतल कराने का व्यय ज्ञात कीजिए यदि प्रति वर्गमीटर समतल कराने का व्यय 180 रू. हो।

6. दिए गए समचतुर्भुजाकार टाइलों के युग्म का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



7. कल्याण का खेत चतुर्भुजाकार है। इस खेत का एक विकर्ण 220 मीटर है तथा इस विकर्ण पर शेष दोनों शीर्षों से डाले गए लम्बों की लम्बाईयाँ क्रमशः 80 मीटर एव 130 मीटर हो तो खेत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

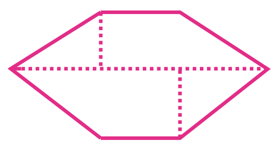
8. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।
   (i) समचतुर्भुज का क्षेत्रफल उसके विकर्णों के गुणनफल का................ होता है।
   (ii) विषमबाहु चतुर्भुज के दोनों विकर्ण सदैव .... माप के होते हैं।
   (iii) सूत्र = $\frac{1}{2}$ x (समान्तर भुजाओं का योग) x ऊँचाई द्वारा.......................चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात किया जाता है।
   (iv) वह चतुर्भुज जिसके दो असमान विकर्ण परस्पर लम्ब समद्विभाजित होते हैं, ... कहलाता है।

14.5 बहुभुज का क्षेत्रफल (फील्ड बुक)

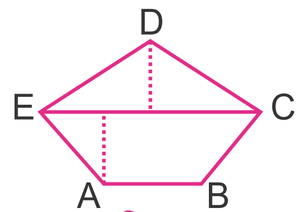
हमने अब तक विभिन्न समतल ज्यामितीय आकृतियों जैसे त्रिभुज, समस्त प्रकार के चतुर्भुज

तथा वृत्त के क्षेत्रफल को ज्ञात करना सीखा है। इनमें से प्रत्येक आकृति के लिए उसका क्षेत्रफल निकालने का निश्चित सूत्र है किन्तु जब हमको पंचभुज, षट्भुज, सप्तभुज .....आदि बहुभुजों के क्षेत्रफल ज्ञात करने हो तो क्या विधि अपनानी होगी ? आओ चर्चा करें।

दिए गए बहुभुज क्षेत्रों को देखिए। क्या इनके कुछ शीर्षों को मिलाने पर हमें त्रिभुजाकार अथवा चतुर्भुजाकार क्षेत्र प्राप्त हो रहे हैं ? क्या प्राप्त होने वाली ऐसी त्रिभुजाकार व चतुर्भुजाकार आकृतियों के क्षेत्रफलों का योगफल उस बहुभुज का क्षेत्रफल होगा ?



चित्र–1

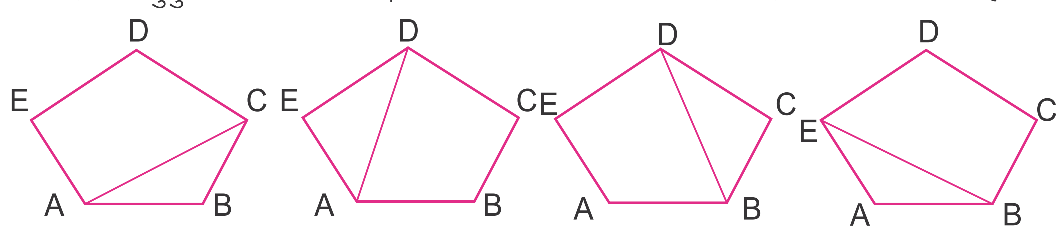


चित्र–2

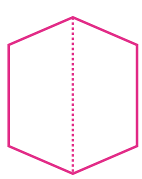
1. चित्र 2 में दिए गए पंचभुज ABCDE को देखिए। इसके शीर्षों E तथा C को मिलाने पर यह एक त्रिभुज ECD तथा एक समलम्ब चतुर्भुज ABCE में विभक्त हो जाता है। हम इन दोनों क्षेत्रों का अलग–अलग क्षेत्रफल सम्बन्धित सूत्र द्वारा ज्ञात कर सकते हैं।

   अर्थात्

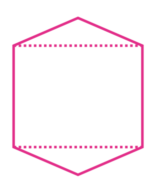
   बहुभुज ABCDE का क्षेत्रफल =△ ECD का क्षेत्रफल + समलम्ब चतुर्भुज ABCE का क्षेत्रफल
2. पंचभुज ABCDE में भिन्न–भिन्न शीर्ष युग्मों को मिलाएँ। इस प्रकार प्राप्त होने वाले त्रिभुजों व समलम्ब चतुर्भुजों पर विचार करें। क्या प्रत्येक प्रकार से प्राप्त क्षेत्रफलों का योग समान होगा ?



यही क्रिया षट्भुज के साथ भी दोहराएँ। कुछ संभावित विभाजनों को चित्र में देखकर चर्चा करें।



(दो चतुर्भुजों में विभाजन)

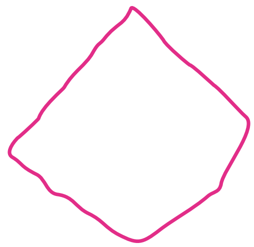


(दो त्रिभुजों तथा एक चतुर्भुज में विभाजन)

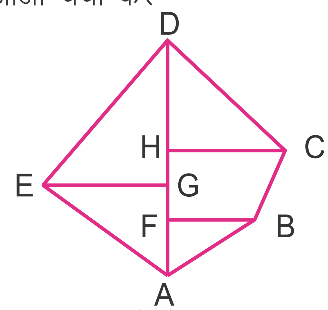
14.5.1 अनियमित बहुभुजों का क्षेत्रफल

आपने कई बार अपने आसपास कुछ ऐसे खेत, मैदान या अन्य भूमिक्षेत्र देखे होंगे जो निश्चित आकार के बहुभुजीय क्षेत्र नहीं होते ।

प्रायः पटवारी तथा इन्जीनियर अपने भूमि सर्वेक्षण के दौरान ऐसे आकारों का क्षेत्रफल मापने के लिए उन्हें छोटे–छोटे खण्डों में बाँट देते हैं। प्रत्येक खण्ड एक समतल ज्यामितीय आकृति होता है एवं सभी खण्डों के क्षेत्रफलों का योगफल उस सम्पूर्ण आकार का क्षेत्रफल होता है। अनियमित आकारों का क्षेत्रफल ज्ञात करने को क्षेत्रमिति (फील्ड बुक) कहते हैं। आओ चर्चा करें



अनियमित आकार



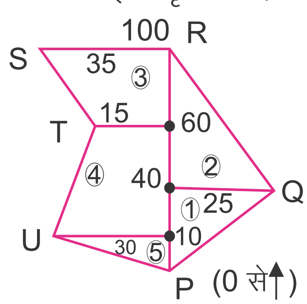
बहुभुजीय खण्डों में विभक्त फील्ड बुक

चित्र में दिए गए अनियमित आकार के भूमिक्षेत्र को देखिए। इस रूप में इसका क्षेत्रफल ज्ञात करना जटिल कार्य है।

इसके लिए आकृति के लम्बाई के अनुदिश आधार रेखा खींची जाती है। आकृति के विभिन्न कोनों (शीर्षों)से आधार रेखा पर लम्ब डाले जाते हैं। (चित्र में देखिए) इस प्रकार हमें विभिन्न समतलीय आकृतियाँ प्राप्त होती हैं। आधार रेखा में A से विभिन्न बिन्दुओं यथा F, G, H तथा D की दूरियाँ पैमाने के आधार पर लिखी जाती हैं। इसी प्रकार लम्बवत दूरी क्रमशः FB, HC, EG आदि पैमाने से ही लिखी जाती है तो फिर इसका क्षेत्रफल ज्ञात करना आसान हो जाता हैं।

सम्पूर्ण आकृति का क्षेत्रफल = $\triangle$ABC का क्षेत्रफल + समलम्ब चतुर्भुज FBCH का क्षे.
+ $\triangle$HCD का क्षे. + $\triangle$ EGD का क्षे. + $\triangle$AHE का क्षे.

उदाहरण 8 दी गई आकृति PQRSTU का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



हल सम्पूर्ण आकृति PQRSTU को खण्डों में विभक्त करने पर कुल 5 आकृतियाँ प्राप्त होती है

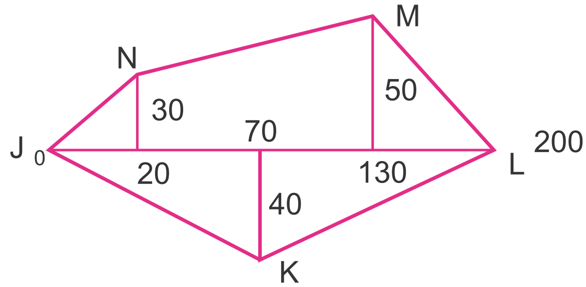
PQRSTU का कुल क्षेत्रफल = आकृति (1) का क्षे. + आकृति (2) का क्षे. + आकृति (3) का क्षे.
+ आकृति (4) का क्षे. + आकृति (5) का क्षे.

$$= [\frac{1}{2} \times 40 \times 25] + [\frac{1}{2} \times 60 \times 25] + [\frac{1}{2} \times (15 + 35) \times 40] + [\frac{1}{2} \times (30 + 15) \times 50]$$

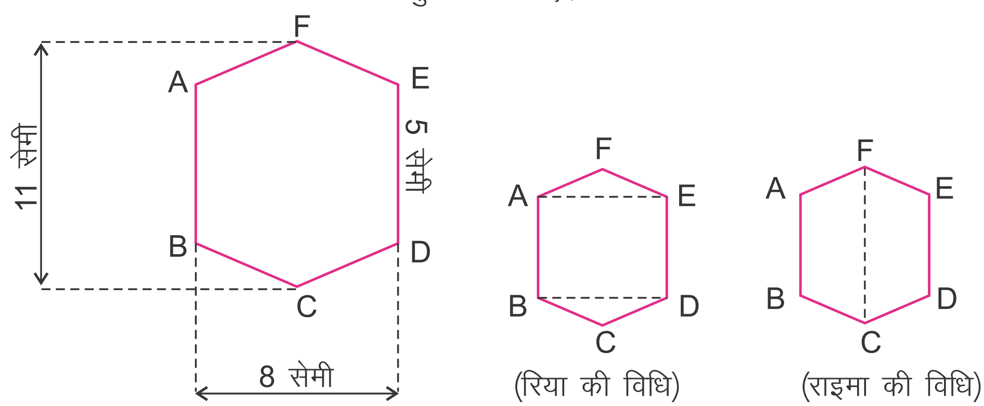
$$+ [\frac{1}{2} \times 10 \times 30] = 500 + 750 + 1000 + 1125 + 150 = 3525$$ वर्ग इकाई उत्तर

प्रश्नावली 14.2

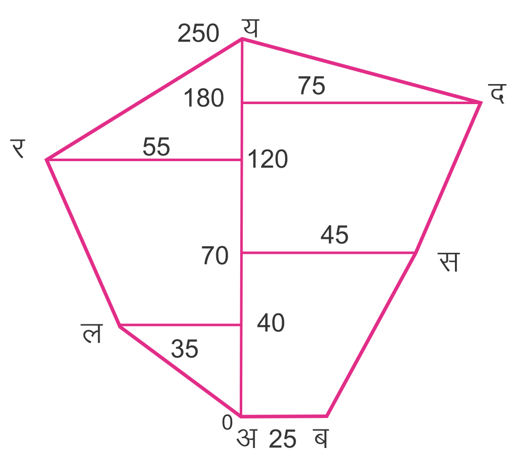
1. दी गई मापों (मीटर में) के आधार पर बहुभुज JKLMN का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



2. चित्रानुसार ABCDEF एक षट्भुज के आकार का क्षेत्र है जिसकी प्रत्येक भुजा 5 सेमी है। रिया तथा राइमा इसे दो विभिन्न प्रकारों से विभाजित कर क्षेत्रफल ज्ञात करती हैं दोनों प्रकार से प्राप्त क्षेत्रफलों की तुलना कीजिए।



3. रामलाल के खेत के प्रत्येक भाग की माप (मीटर में) दी गई हो तो 4 रू. प्रति वर्गमीटर की दर से उसके खेत की जुताई कराने की लागत ज्ञात कीजिए।



हमने सीखा

1. समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ x समान्तर भुजाओं का योग x ऊँचाई

2. समचतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

3. समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ x विकर्णों के गुणनफल

(आधार तथा ऊँचाई के मान दिए जाने पर क्षेत्रफल = आधार x ऊँचाई)

4. सामान्य चतुर्भुज (विषमबाहु) का क्षेत्रफल

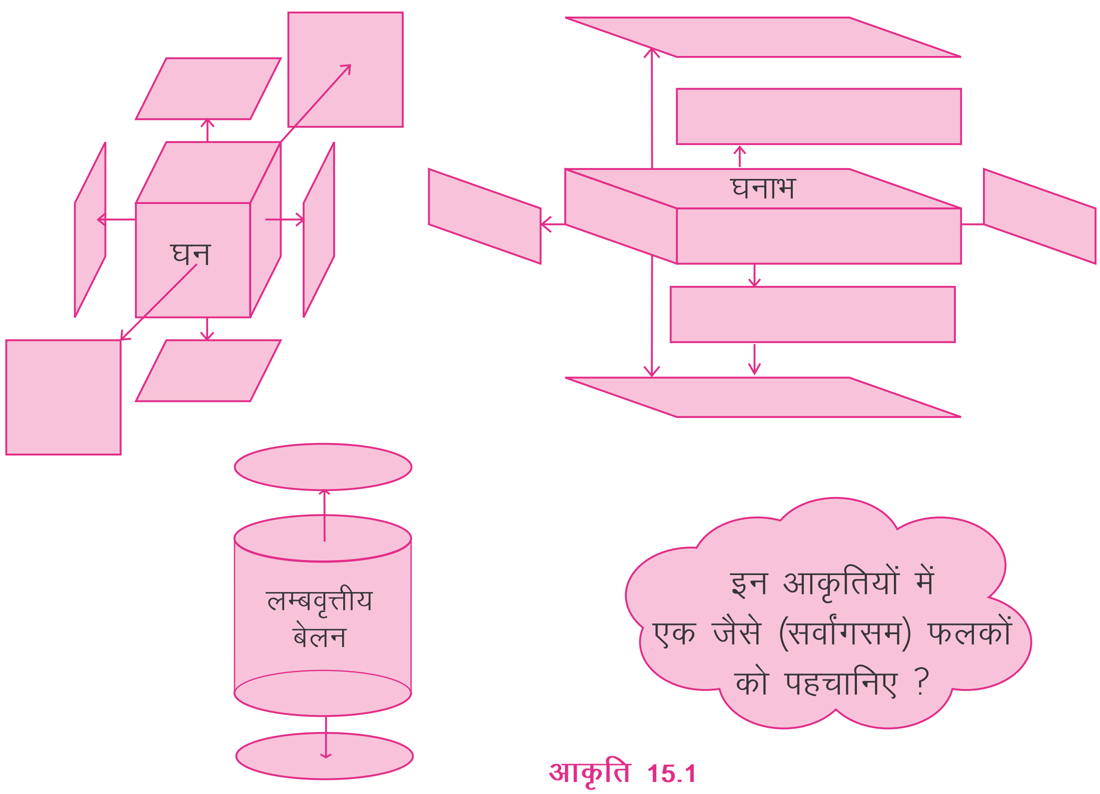
= $\frac{1}{2}$ x विकर्ण x(विकर्ण पर शेष शीर्षों से ड़ाले गए लम्बों का योग)

5. पंचभुज षट्भुज, सप्तभुज आदि बहुभुजों का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए इन बहुभुजों को त्रिभुज, समस्त प्रकार के चतुर्भुज आदि आकृतियों में विभाजित करते हैं तथा इनके क्षेत्रफलों का योग ही उस बहुभुज का क्षेत्रफल होता है।

अध्याय 15
पृष्ठीय क्षेत्रफल एवं आयतन

15.1 आपने त्रिविमीय आकृतियों के फलकों को द्विविमीय आकृतियों के रूप में पहचान करना सीखा था। आप द्विविमीय जालकों से घन, घनाभ, बेलन इत्यादि का निर्माण करना भी सीख चुके हैं।

आपने देखा होगा कुछ आकारों में दो या दो से अधिक फलक या पृष्ठ एक जैसे (सर्वांगसम) होते हैं।



आकृति 15.1

नोट : लम्बवृत्तीय बेलन में वृत्ताकार फलकों के केन्द्रों को मिलाने वाला रेखाखण्ड आधार पर लम्ब होना आवश्यक है।

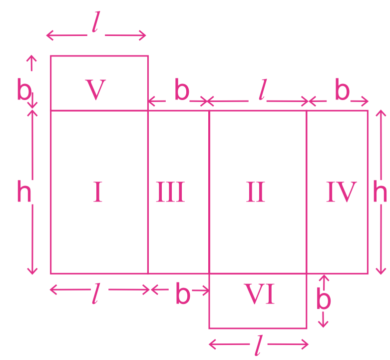
15.2 घन एवं घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल

गोपाल और रमेश घर में सजावट के लिए रंगीन घन और घनाभ बनाना चाहते हैं। गोपाल ने 4 सेमी किनारे वाला घन तैयार किया और रमेश ने 5 सेमी लम्बा, 4 सेमी चौडा और 3 सेमी ऊँचा घनाभ तैयार किया। अब वे दोनों इसे सुन्दर बनाने के लिए रंगीन कागज चिपकाना चाहते हैं, दोनों इस दुविधा में हैं कि बाजार से कितना कागज खरीदकर लाया जाए ?

गोपाल ने रमेश को कहा "क्यों न हम प्रत्येक फलक का क्षेत्रफल अलग–अलग निकाल कर जोड़ लें।" तभी गोपाल के बड़े भैया उनकी ये बात सुनकर कहते हैं, इसे ही पृष्ठीय क्षेत्रफल कहते है अर्थात् किसी ठोस के सम्पूर्ण पृष्ठों द्वारा घेरा गया क्षेत्र उस आकृति का पृष्ठीय क्षेत्रफल कहलाता है।

15.2.1 घनाभ

एक घनाभाकार डिब्बे (रमेश का घनाभ) को काटकर खोलने पर हमें उसका जालक चित्र में दर्शाए अनुसार प्राप्त होता है। प्रत्येक फलक पर उसकी विमाएँ लिखिए। आप देखते हैं कि घनाभ में हमें दो–दो सर्वांगसम फलकों के तीन जोड़े प्राप्त होते हैं।



घनाभ का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = क्षेत्रफल I + क्षेत्रफल II + क्षेत्रफल III + क्षेत्रफल IV + क्षेत्रफल V + क्षेत्रफल VI

$= h \times l + h \times l + b \times h + b \times h + l \times b + l \times b$

$= 2hl + 2bh + 2lb$

$= 2(lb + bh + hl)$

जहाँ l, b तथा h क्रमशः घनाभ की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई है।

इस प्रकार रमेश के घनाभ का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2(5 \times 4 + 4 \times 3 + 3 \times 5)$

$= 2(20 + 12 + 15)$

$= 2 \times (47)$

$= 94$ वर्ग सेमी

कमरे में चारों दीवारों पर पुताई करवाने हेतु घनाभ के तल (फर्श) एवं छत को छोड़ना होता है। केवल चारों दीवारों का ही क्षेत्रफल निकालना होता है। इसे घनाभ का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल कहते है।

अर्थात् घनाभ का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल = स.पृ.क्षे. – (छत व फर्श का सम्मिलित क्षेत्रफल)

$= 2(lb + bh + hl) - 2lb$

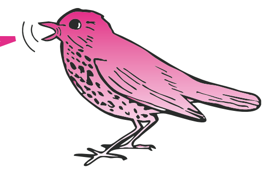
$= 2lb + 2bh + 2hl - 2lb$

$= 2bh + 2hl$

$= 2 \times (l + b) \times h$ वर्ग इकाई

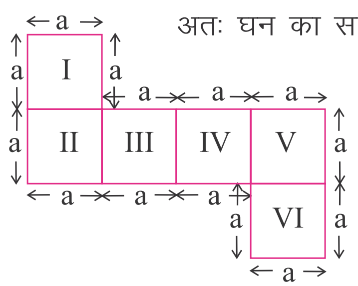
= आधार (फर्श) का परिमाप x ऊँचाई

छत और फर्श का क्षेत्रफल ऊँचाई से स्वतंत्र होता है, केवल लम्बाई और चौड़ाई पर निर्भर करता है।



15.2.2 घन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

आप जानते हैं कि घन एक ऐसा घनाभ है जिसकी तीनों विमाएँ (भुजाएँ) लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई समान होती है, घन के एक फलक का क्षेत्रफल a^2 होता है। तथा सभी छः फलक वर्गाकार होते हैं। प्रत्येक भुजा को a से निरूपित करते हैं।



अतः घन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = 6 x एक वर्गाकार फलक का क्षेत्रफल

$= 6 \times a^2$

$= 6a^2$

इस प्रकार गोपाल के घन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 6 \times 4^2$

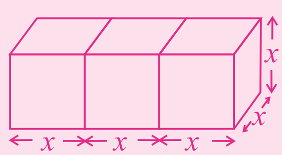
$= 6 \times 16$

= 96 वर्ग सेमी

करो और सीखो

(1) यदि x भुजा वाले तीन घनों को चिपकाकर घनाभ बनाया गया है तो घनाभ की विमाएँ क्या होंगी ?

स्थिति I

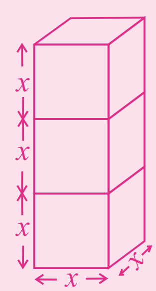


लम्बाई = ...

चौड़ाई = ...

ऊँचाई = ...

स्थिति II



लम्बाई = ...

चौड़ाई = ...

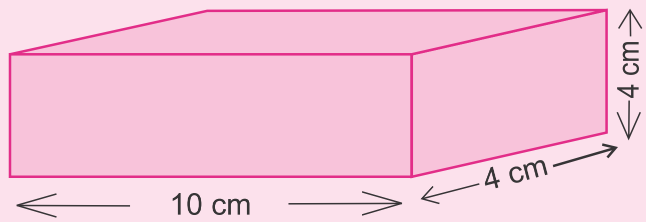
ऊँचाई = ...

करो और सीखो

1. एक 3 सेमी भुजा वाले घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ऐसे 5 घनों का पृष्ठीय क्षेत्रफल कितना होगा ?

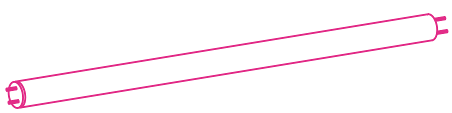
2. 3 सेमी भुजा वाले 5 घनों का स. पृष्ठीय क्षेत्रफल कितना होगा ? यदि इन्हें एक के बाद एक चिपका दे तो उनके पृष्ठीय क्षेत्रफल में कितनी कमी हो जाएगी?

3. नीचे दिए गए घनाभ का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

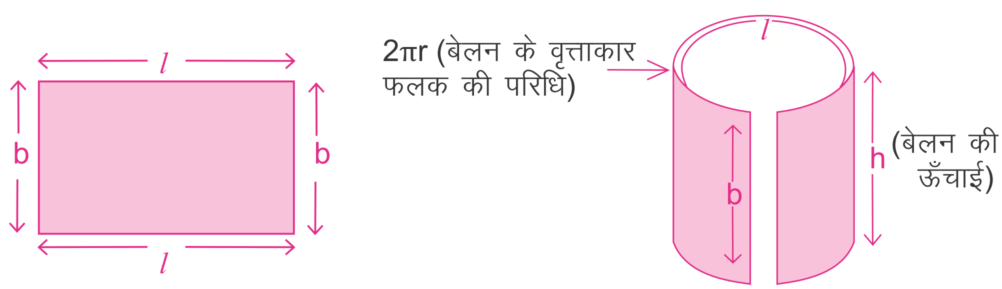


15.3 बेलन का पृष्ठीय क्षेत्रफल

एक कॉल्ड ड्रिंक का टिन, पाइप, ट्यूबलाईट का ट्यूब, गोल खम्भा आदि लम्बवृत्तीय बेलन के उदाहरण है। बेलन के दोनों वृत्ताकार फलकों को छोड़कर बचा हुआ पृष्ठ वक्र पृष्ठ कहलाता है। इसके क्षेत्रफल को ज्ञात करने के लिए हम एक क्रियाकलाप करेंगे।



क्रियाकलाप – एक आयताकार कागज लीजिए और उसके किनारों पर लम्बाई और चौड़ाई अंकित कर दीजिए। चित्रानुसार उसको लम्बाई के अनुदिश मोड़कर सिरों को बिना अतिव्यापन (overlap) के टेप की सहायता से चिपकाइए इस प्रकार एक बेलन के वक्र पृष्ठ का निर्माण होगा।



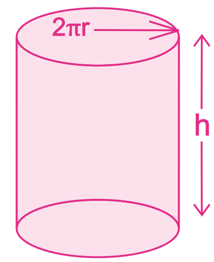
आयताकार कागज की लम्बाई (l) बेलन के वृत्ताकार आधार की परिधि ($2\pi r$) में रूपान्तरित हो गई है और चौड़ाई (b) ने बेलन की ऊँचाई (h) का रूप ले लिया है।

इस प्रकार बेलन का वक्र पृ. क्षे. = आयताकार कागज का क्षेत्रफल

$= l \times b$

$= 2\pi r \times h$

$= 2\pi rh$ वर्ग इकाई



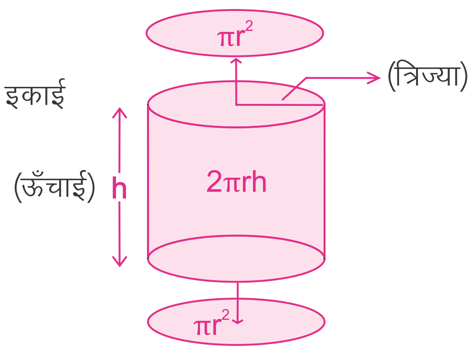
अब आयताकार कागज को चौड़ाई के अनुदिश मोड़कर बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

यदि बेलन के दोनों सर्वांगसम (एक जैसे) वृत्ताकार फलकों को भी वक्र पृष्ठ के साथ सम्मिलित कर लिया जाए, तो वह बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ कहलाता है। इसका क्षेत्रफल किस प्रकार ज्ञात करेंगे?

बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + दोनों वृत्ताकार फलकों का क्षेत्रफल

$= 2\pi rh + 2 \times \pi r^2$

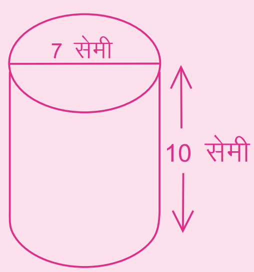
$= 2\pi r\,(h + r)$ वर्ग इकाई



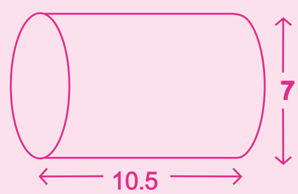
करो और सीखो

निम्नलिखित बेलनों का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए –

(i)



(ii)



उदाहरण 1 विजय के घनाभाकार कमरे की आंतरिक विमाएँ 12 मी, 8 मी व 4 मी है। वह अपने इस कमरे की चारों दीवारों पर सफेदी (पेन्ट) करवाना चाहता है। 5 रूपये प्रति वर्ग मीटर की दर से सफेदी करवाने का खर्च ज्ञात कीजिए। उसे बताइए कि यदि वह छत पर भी सफेदी करवाएगा तो खर्च में कितनी वृद्धि हो जाएगी ?

हल कमरे की लम्बाई (l) = 12 मी

चौड़ाई (b) = 8 मी

ऊँचाई (h) = 4 मी

कमरे का पार्श्वपृष्ठीय (चारों दीवारों का) क्षेत्रफल = आधार का परिमाप x ऊँचाई

$= 2(l + b) \times h$

$= 2(12 + 8) \times 4$

$= 2 \times 20 \times 4$

$= 160$ मी^{2}

सफेदी करवाने का प्रति वर्ग मीटर खर्च = 5 रू.

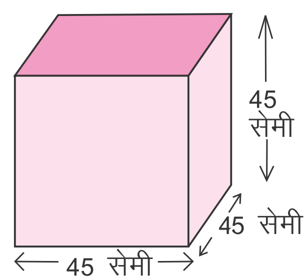
कमरे की चारों दीवारों पर सफेदी करवाने का कुल खर्च = $160 \times 5 = 800$ रू.

छत का क्षेत्रफल = $l \times b = 12 \times 8 = 96$ मी^{2}

छत पर सफेदी हेतु अतिरिक्त खर्च = $96 \times 5 = 480$ रू.

अर्थात् विजय चारों दीवारों के साथ–साथ छत पर भी सफेदी करवाएगा तो कुल खर्च 800 रू. से 480 रू. बढ़कर 1280 रू. हो जाएगा।

उदाहरण 2 मनीषा के पास बिना ढक्कन वाला एक घनाकार टिन का डिब्बा है, जिसकी भुजा 45 सेमी है। वह इसके बाहरी पृष्ठ पर रंगीन कागज चिपकाना चाहती है, आवश्यक कागज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



हल घन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = $6a^2$

शीर्षफलक (ढक्कन) को छोड़ने पर शेष क्षे. = $6a^2 - a^2$

$= 5a^2$

$= 5 \times (45)^2$

$= 5 \times 2025$

$= 10125$ वर्ग सेमी

उदाहरण 3 एक ऐसे बेलन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या 7 सेमी और सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल 968 सेमी है।

हल माना कि बेलन की ऊँचाई = h cm

त्रिज्या = 7 cm

बेलन का सं. पृ. क्षे. = $2\pi r(h + r)$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times (h + 7)$ वर्ग सेमी

परन्तु प्रश्नानुसार सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल 968 सेमी^{2} है अतः

$$2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times (h + 7) = 968$$

$$(h + 7) = \frac{968}{2 \times 22}$$

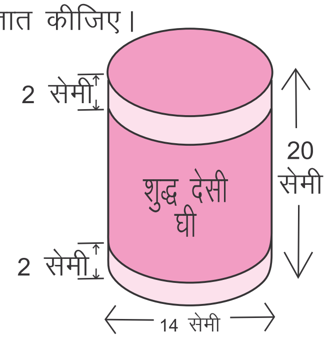
$$h + 7 = 22$$

$$h = 15 \text{ सेमी}$$

अतः बेलन की ऊँचाई = 15 सेमी

उदाहरण 4 एक कम्पनी अपने उत्पाद को 20 सेमी ऊँचाई और 14सेमी व्यास के बेलनाकार डिब्बे में पैक करते हुए उसके वक्र पृष्ठ पर लेबल लगाती है। लेबल लगाते वक्त दोनों ओर 2 सेमी की दूरी छोड़ दी जाती है तो लेबल का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल



बेलनाकार डिब्बे की ऊँचाई = 20 सेमी

लेबल में प्रयुक्त ऊँचाई = 20 - (2x2)

= 16 सेमी

डिब्बे का व्यास (2r) =14सेमी

लेबल का क्षेत्रफल = $2\pi rh$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7$ सेमी x 16 सेमी

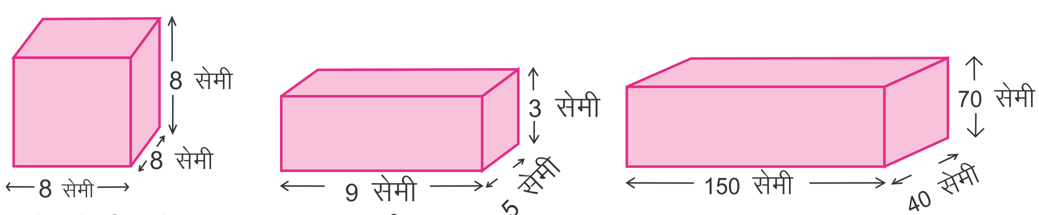
= 44 x 16 सेमी^{2}

= 704 सेमी^{2}

अतः लेबल का क्षे. = 704 सेमी^{2}

प्रश्नावली 15.1

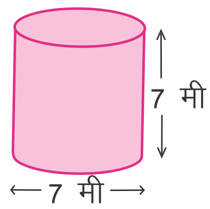
1. दिए गए मापों के आधार पर– घनाकार लकड़ी की गिट्टी, घनाभकार ईंट व सन्दूक का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

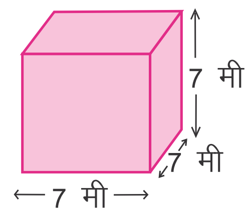


(लकड़ी की गिट्टी) (ईंट) (सन्दूक)

2. ऐसे घन की भुजा ज्ञात कीजिए, जिसका सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल 600 वर्ग सेमी है।

3. चित्र में दिखाई गई आकृतियों में से किस आकृति का पृष्ठीय क्षेत्रफल अधिक है ? ($\pi = \frac{22}{7}$)





4. एक बेलनाकार टेंक के आधार की परिधि 176 सेमी तथा ऊँचाई 30 सेमी हो तो उसके वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
5. 8 वर्ग मीटर धातु की एक चादर से 1 मीटर ऊँची और 140 सेमी व्यास वाली एक बन्द बेलनाकार टंकी बनाई जाती है। टंकी बनने के पश्चात कितनी चादर शेष बचेगी ?
6. 80 सेमी x 50 सेमी x 25 सेमी विमा वाले सन्दूक के बाहरी पृष्ठ पर पेन्ट करना है, तो 100 सेमी^{2} फैलाव क्षमता वाले कितने पेन्ट के डिब्बों की आवश्यकता होगी ?
7. एक भवन में 25 बेलनाकार खम्भे हैं। प्रत्येक खम्भे की त्रिज्या 28 सेमी और ऊँचाई 4 मी है। 8 रूपये प्रति वर्ग मी की दर से सभी खम्भों के वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल पर पेन्ट कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।
8. एक खोखले बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल 4224 सेमी^{2} है। इसे इसकी ऊँचाई के अनुदिश काट कर 33 सेमी चौड़ी एक आयताकार चादर बनाई गई है। इस चादर का परिमाप ज्ञात कीजिए।
9. किसी सड़क को एक बार में समतल करने के लिए एक रोलर को 750 चक्कर लगाने पड़ते हैं। यदि रोलर का व्यास 84 सेमी और लम्बाई 1 मीटर है तो सड़क का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
10. 1 सेमी भुजा वाले 64 घनों को जमाकर एक घन बनाया गया है, इस प्रकार बने घन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

15.4 आयतन एवं मानक इकाई

एक त्रिविमीय वस्तु द्वारा घेरा गया स्थान उसका आयतन कहलाता है। उदाहरणतः किसी कमरे के अन्दर रखी हुई कपड़ों की अलमारी का आयतन आटे के पीपे से अधिक है।

आप जानते हैं कि हम किसी आकृति का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए इकाई भुजा के वर्गों का उपयोग करते हैं। इसी प्रकार किसी ठोस का आयतन ज्ञात करने के लिए हमें उस ठोस में समाहित होने वाली इकाई घनों की संख्या ज्ञात करनी होगी। आयतन को निम्नांकित मानक इकाई में मापा जाता है।

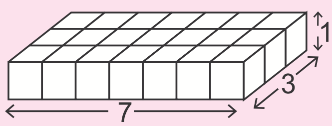
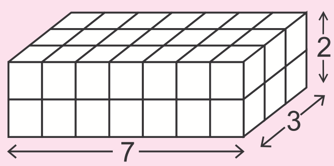
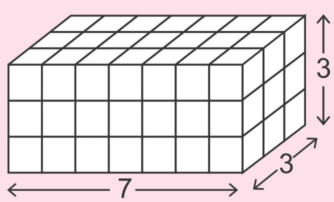
1 सेमी x 1 सेमी x 1 सेमी = 1 सेमी^{3} या 1 घन सेमी

1 मी x 1 मी x 1 मी = 1 मी^{3} या 1 घन मीटर

1 घन मीटर = 100 सेमी x 100 सेमी x 100 सेमी = 1000000 सेमी^{3}

15.4.1 घन व घनाभ का आयतन

इकाई लम्बाई वाले कुछ घनों का निम्नानुसार व्यवस्थित कर इससे बने घनाभ का आयतन ज्ञात कीजिए–

	घनाभ	आयतन	लम्बाई l	चौड़ाई b	ऊचाँई h	l x b x h
(i)		21 इकाई घन	7 इकाई	3 इकाई	1 इकाई	7x3x1 =21घन इकाई
(ii)		42 इकाई घन	7 इकाई	3 इकाई	2 इकाई	....
(iii)		63 इकाई	7 इकाई	3 इकाई	3 इकाई	....

तालिका 15.1

सारणी पूरा करने के बाद हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि

घनाभ का आयतन = लम्बाई x चौड़ाई x ऊँचाई

इस प्रकार 7 सेमी लम्बे, 5 सेमी चौड़े और 2 सेमी ऊँचे घनाभ का आयतन

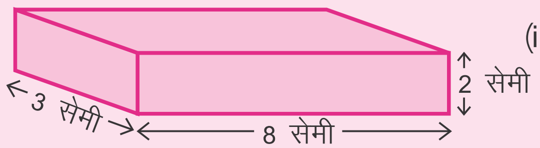
= लम्बाई x चौड़ाई x ऊँचाई

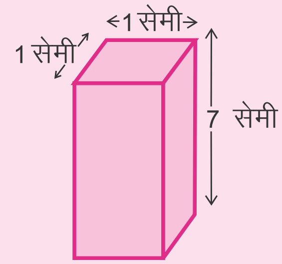
= 7सेमी x 5सेमी x 2सेमी

= 70 सेमी^{3}

करो और सीखो

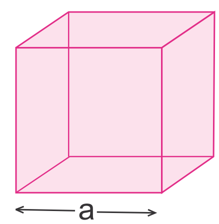
दिए गए मापों के आधार पर घनाभ का आयतन ज्ञात कीजिए

(i) 

(ii) 

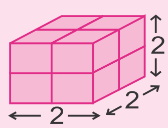
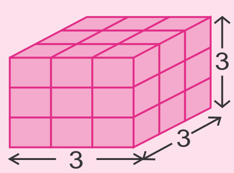
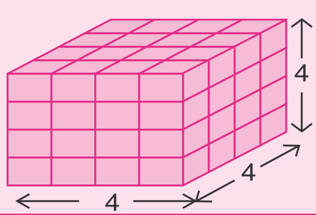
घन का आयतन

आप जानते है कि घन एक ऐसा घनाभ है जिसकी लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई समान होती है और प्रत्येक भुजा को a से निरूपित करते हैं अतः



घन का आयतन = भुजा x भुजा x भुजा

घन का आयतन = a x a x a = a^3 घन इकाई

क्र.स.	घन	इकाई घनो की संख्या	भुजा	भुजा x भुजा x भुजा	$(\text{भुजा})^3$
(i)		8	2 इकाई	2इ. x 2इ. x 2इ.	8 घन इकाई
(ii)		27	---------	---------	---------
(ii)		64	---------	---------	---------

तालिका 15.2

करो और सीखो

निम्नलिखित भुजा वाले घनों का आयतन ज्ञात कीजिए –

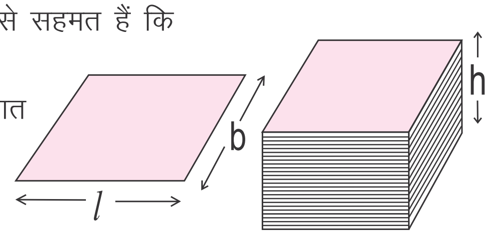
(i) 1.5 cm (ii) 4 m

एक कागज की आयताकार शीट लीजिए और इसका क्षेत्रफल माप लीजिए। अब इस कागज को आधार बनाते हुए, इसी माप की और शीटें एक के ऊपर एक रखते जाएँ और वांछित ऊँचाई के घनाभ का निर्माण करें (समझाने के लिए पेपर रिम का उपयोग किया जा सकता है।) आधार का क्षेत्रफल और ऊँचाई का गुणा कीजिए और परिणाम नोट कर लें।

पूर्व में स्थापित सूत्र द्वारा इस घनाभ का आयतन ज्ञात कीजिए। दोनों परिणामों से क्या निष्कर्ष निकाला जा सकता है? क्या आप इस बात से सहमत हैं कि

घनाभ का आयतन = आधार का क्षे. x ऊँचाई

इस प्रकार से और किसी आकृति का आयतन ज्ञात किया जा सकता है?



नोटः– यहाँ यह ध्यान रखना आवश्यक है कि ठोस का आधार और शीर्ष सर्वांगसम हो एवं दोनों के केन्द्र को मिलाने वाला रेखाखण्ड आधार और शीर्ष पर लम्बवत हो।

15.4.2 बेलन का आयतन

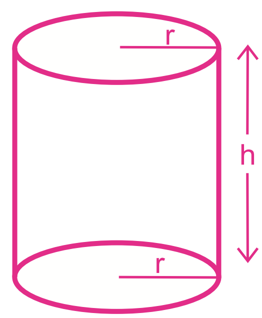
घनाभ के समान ही बेलन में भी आधार और शीर्ष सर्वांगसम और समान्तर होते हैं और , वक्रपृष्ठ आधार पर लम्बवत् होता है।

घनाभ का आयतन = आधार का क्षे. x ऊँचाई

बेलन का आयतन = आधार का क्षे. x ऊँचाई

$= \pi r^2 \times h$

$= \pi r^2 h$ घन इकाई



धारिता

किसी त्रिविमीय वस्तु द्वारा घिरी हुई जगह आयतन और उसमें भरी जा सकने वाली द्रव की मात्रा धारिता कहलाती है। 1 सेमी भुजा वाले घन में भरा जा सकने वाले द्रव की मात्रा 1मिली(ml) होता है, इसी प्रकार इसकी निम्न मानक इकाईयाँ है।

1 मिली = 1 सेमी^{3}

1 लीटर = 1000 सेमी^{3} या 1000 मीली लीटर

1 किलोलीटर = 1000 लीटर या 1 मी^{3} = 1000 लीटर

उदाहरण 5 एक ऐसे घनाभ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए, जिसका आयतन 275 सेमी^{3} और आधार का क्षेत्रफल 25 सेमी^{2} है।

हल घनाभ का आयतन = आधार का क्षेत्रफल x ऊँचाई

275 सेमी^{3} = 25 सेमी^{2} x ऊँचाई

> **संकेत:** मी x मी x मी = मी^{3}

$$\text{ऊँचाई} = \frac{275 \text{सेमी}^3}{25 \text{सेमी}^2} = 11 \text{ सेमी}$$

उदाहरण 6 एक घनाभाकार गोदाम, जिसकी माप 60 मी x 40 मी x 30 मी है, के अन्दर कितने घनाभाकार डिब्बे रखे जा सकते हैं, यदि डिब्बे का आयतन 0.8 मी^{3} है?

हल एक डिब्बे का आयतन = 0.8 मी^{3}

गोदाम का आयतन = 60 मी x 40 मी x 30 मी

= 72000 मी^{3}

$$\text{गोदाम में रखे जा सकने वाले डिब्बों की संख्या} = \frac{\text{गोदाम का आयतन}}{\text{एक डिब्बे का आयतन}}$$

$$= \frac{60 \text{ मी} \times 40 \text{ मी} \times 30 \text{ मी}}{0.8 \text{मी}^3}$$

$$= \frac{72000 \text{ मी}^3}{0.8 \text{ मी}^3} = 90000$$

उदाहरण 7 यदि एक घन मीटर बर्फ का तौल 900 किग्रा हो तो बर्फ के 50 सेमी भुजा के घन का तौल ज्ञात कीजिए।

हल 50 सेमी भुजा वाले घन का आयतन = $(50)^3$ घन सेमी

= 125000 घन सेमी

$$= \frac{125000}{100 \times 100 \times 100} \text{ घन मीटर}$$

= 0.125 घन मीटर

1 घन मीटर बर्फ का तौल = 900 किग्रा

0.125 घन मीटर बर्फ का तोल = 900 x 0.125 मी^{3} = 112.5 किग्रा

उदाहरण 8 एक 11 सेमी x 4 सेमी के आयताकार कागज को मोड़कर (बिना अतिव्यापन) एक 4 सेमी ऊँचाई का बेलन बनाया गया है। इसका आयतन ज्ञात कीजिए।

हल बेलन की ऊँचाई = 4 सेमी

बेलन की आधार की परिधि = 11 सेमी

अर्थात्

$$2\pi r = 11$$

$$2 \times \frac{22}{7} \times r = 11$$

$$r = \frac{7}{4} \text{ सेमी}$$

बेलन का आयतन (v) $= \pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{7}{4} \times \frac{7}{4} \times 4$$

$$= \frac{22 \times 7}{4} \text{ सेमी}^3 \qquad = 38.5 \text{ सेमी}^3$$

उदाहरण 9 एक बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल 440 मी^{2} है, जिसकी ऊँचाई 4 मी. है। आयतन ज्ञात कीजिए।

हल बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = 440 मी^{2}

अतः $2\pi rh = 440$ मी^{2}

$$2 \times \frac{22}{7} \times r \times 4 \text{ मी} = 440 \text{ मी}^2$$

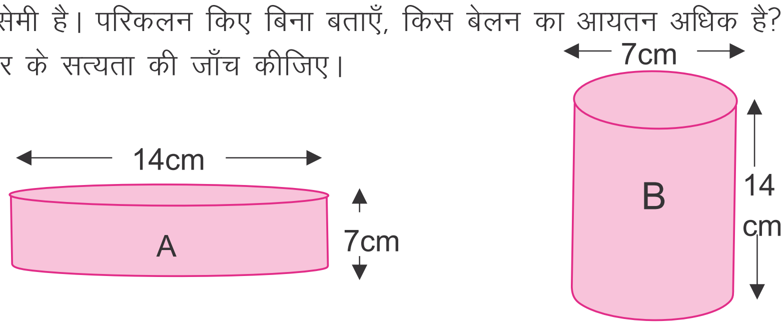
$$r = \frac{440 \times 7}{2 \times 22 \times 4} \text{ मी} \qquad = \frac{35}{2} \text{ मी}$$

बेलन का आयतन $= \pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{35}{2} \times \frac{35}{2} \times 4 \qquad = 3850 \text{ मी}^3$$ **उत्तर**

प्रश्नावली 15.2

1. एक घनाभ की विमाएँ 60 सेमी x 54 सेमी x 30 सेमी है। इस घनाभ के अन्दर 6 सेमी भुजा वाले कितने घन रखे जा सकते हैं?
2. 3 मीटर लम्बे, 50 सेमी चौड़े तथा 25 सेमी ऊँचे लकड़ी के लट्ठे में से 25 सेमी भुजा वाले घनाकार लकड़ी के कितने गुटके काटे जा सकते हैं ?
3. बेलन A का व्यास 14 सेमी और ऊँचाई 7 सेमी है और बेलन B का व्यास 7 सेमी और ऊँचाई 14 सेमी है। परिकलन किए बिना बताएँ, किस बेलन का आयतन अधिक है? परिकलन से अपने उत्तर के सत्यता की जाँच कीजिए।



4. त्रिज्या 1.5 मीटर और लम्बाई 7 मीटर वाले बेलनाकार दूध के टेंकर से 1 लीटर वाले कितने पॉलीपैक (थैली) भरी जा सकती है? (1मी^{3} = 1000 लीटर)
5. त्रिज्या 3.5 मीटर और गहराई 3 मीटर वाले एक बेलनाकार कुण्ड को 60 लीटर प्रति मिनट पानी देने वाला नल कितने समय में पूरा भर देगा?
6. एक घनाभाकार बर्फ की सिल्ली की विमाएँ 50 सेमी x 30 सेमी x 20 सेमी है। इसका वजन किग्रा में ज्ञात कीजिए। यदि 1000 घन सेमी बर्फ का तौल 900 ग्राम हो।
7. यदि किसी घन की भुजा को दुगुना कर दिया जाए तो
   (i) इसके पृष्ठीय क्षेत्रफल में कितने गुना वृद्धि हो जाएगी?
   (ii) इसके आयतन में कितने गुना वृद्धि होगी?
8. एक 7 मीटर व्यास वाली बेलनाकार टंकी का आयतन 770 घन मीटर है तो टंकी की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हमने सीखा

1. एक ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल इसके फलकों के क्षेत्रफलों के योग के समान होता है।
2. घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2(lb + bh + hl)$ जहाँ l,b,h घनाभ की विमाएँ है।
3. घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल = $6a^2$ जहाँ a = घन की भुजा
4. बेलन का पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2\pi r (h + r)$
   r = बेलन के आधार की त्रिज्या व
   h = बेलन की ऊँचाई
   जहाँ तक अन्यथा न कहा जाए पृष्ठीय क्षेत्रफल से तात्पर्य सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल से है।
5. किसी त्रिविमीय आकृति द्वारा घिरी हुई जगह आयतन कहलाती है।
6. घनाभ का आयतन = लम्बाई x चौड़ाई x ऊँचाई = $l \times b \times h$ घन इकाई (घन की भुजा = a इकाई)
7. घन का आयतन = भुजा x भुजा x भुजा = a^3 घन इकाई
8. बेलन का आयतन = $\pi r^2 h$ घन इकाई
9. यदि किसी ठोस के आधार और शीर्ष सर्वांगसम है और शीर्ष और आधार के केन्द्र को मिलाने वाली रेखाखण्ड आधार पर लम्ब हो (जैसे घन, घनाभ व बेलन) तो
   आयतन = आधार का क्षेत्रफल x ऊँचाई
10. (i) 1 मिली = 1 सेमी^{3}
    (ii) 1 लीटर = 1000 लीटर
    (iii) 1 किलोलीटर = 1000 लीटर या 1 मी^{3} = 1000 लीटर

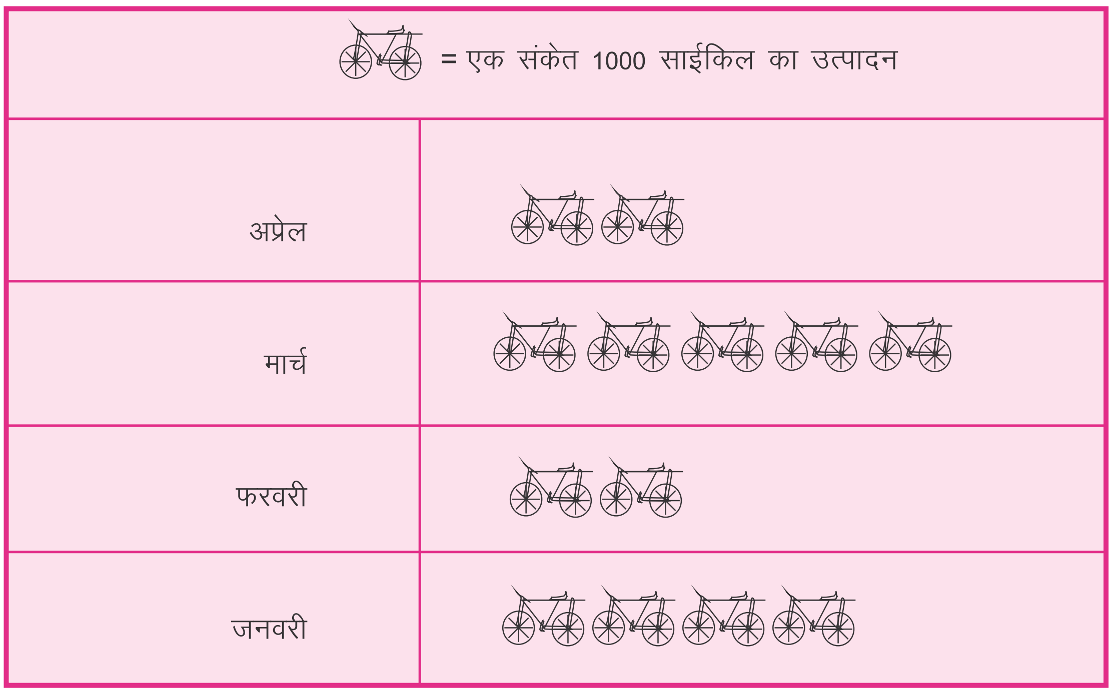
अध्याय 16

आँकड़ों का प्रबन्धन

16.1 हम अपने आसपास प्रायः समाचार पत्रों, पत्रिकाओं और दूरदर्शन पर कई तरह के आँकड़े, तालिकाएँ व आलेख देखते हैं। ये चीजें हमें कुछ जानकारियाँ देती हैं। आप भी अपने आसपास से सूचनाएँ एकत्रित कर अध्ययन कर सकते हैं। आँकड़े एकत्रित करने के पहले हमें यह जानना होगा कि हम क्या अध्ययन करना चाहते हैं। जैसे आप जानना चाहते हैं कि आपकी कक्षा के साथियों की औसत लम्बाई क्या है?

इसे जानने के लिये कक्षा के साथियों की लम्बाई के आँकड़े एकत्रित करने पड़ेंगे। आँकडे क्या बताते हैं इसे सुस्पष्ट करने के लिये आलेखीय रूप से दर्शाते हैं। पिछली कक्षाओं में विभिन्न प्रकार के आलेख आपने पढ़े हैं, आइए उन्हें फिर से देखें–

(i) चित्रालेख (Pictograph) : नीचे दिए गए चित्रालेख के देखकर प्रश्नों का उत्तर दीजिए।



आलेख 16.1

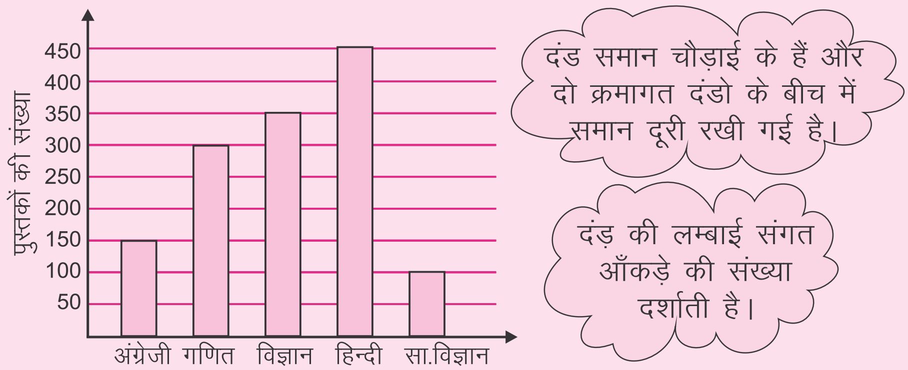
(i) मार्च के महीने में कितनी साईकिलों का उत्पाद हुआ ?

(ii) किन दो महीनों में बराबर उत्पादन हुआ ?

(ii) दंड आलेख (**Bar - Graph**)– दंड आलेख में प्रत्येक दंड की चौड़ाई समान होती है तथा वे एक दूसरे से समान दूरी पर होते हैं। दंड की लम्बाई (ऊँचाई) पैमाने के अनुसार दिए गए आँकड़े के संगत होती है, इसे हम संगत आँकड़ों के समानुपातिक भी कह सकते हैं।

करो और सीखो

नीचे दिए गए दंड आलेख में किसी पुस्तकालय में अलग–अलग विषयों की पुस्तकों की संख्या देखकर दिए गए प्रश्नों के उत्तर दीजिए।



आलेख 16.2

(i) सबसे अधिक किस विषय की पुस्तके हैं और वह कितनी हैं?

(ii) सबसे कम किस विषय की पुस्तकें हैं और वह कितनी हैं?

(iii) पुस्तकालय में कुल कितनी पुस्तकें हैं?

(iv) इस दंड आलेख द्वारा क्या सूचना दी गई हैं ?

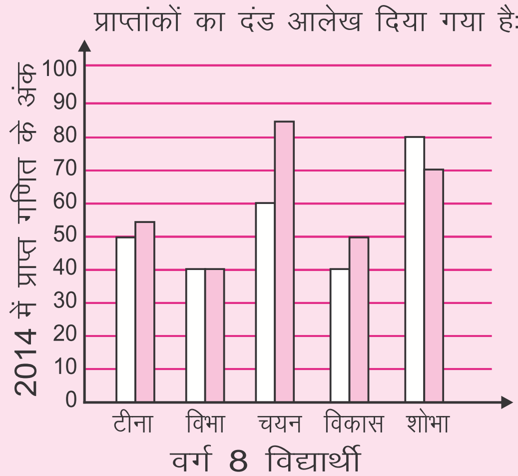
(v) किन दो विषयों की पुस्तकों की संख्या का अन्तर सबसे कम हैं ?

(iii) दोहरे दंड आलेख (Double Bar Graphs)

जब हमें आँकड़ो के दो समूहों की तुलना करने की आवश्यकता होती है तो दोहरे दंड आलेख खींचते हैं।

करो और सीखो

नीचे 5 विद्यार्थियों के वार्षिक एवं अर्धवार्षिक परीक्षा में गणित विषय के प्राप्तांकों का दंड आलेख दिया गया है:–



आलेख 16.3

आलेख के आधार पर निम्न प्रश्नों का उत्तर दीजिए।

(i) किस विद्यार्थी का प्रदर्शन छः माही और वार्षिक में समान रहा ?

(ii) किस विद्यार्थी का प्रदर्शन छः माही की तुलना में वार्षिक में सबसे अच्छा रहा ?

(iii) कितने विद्यार्थियों ने वार्षिक परीक्षा में 50 से अधिक अंक प्राप्त किए ?

(iv) इस दोहरे दंड आलेख में क्या सूचना दी गई है ?

(v) छः माही के अंकों का औसत क्या है? क्या यह वार्षिक परीक्षा के औसत से कम है ?

करो और सीखो

दी गयी सूचनाओं को दर्शाने के लिए अलग–अलग आलेख खींचिए।

(i).

वर्ष	2010	2011	2012	2013	2014
पुस्तकालय के लिए खरीदी गई पुस्तकें	170	150	190	180	210

(ii).

गाँव का नाम	मांकडी	आकोला	रावलीया खुर्द	सिवडिया
पुरूषों की संख्या	1800	1700	1800	1500
स्त्रियों की संख्या	1600	1700	1900	1600

कक्षा VIII में हुई गणित की परीक्षा में बच्चों के 50 में से प्राप्त अंक निम्न प्रकार है।

28, 25, 27, 8, 28, 37, 28, 28, 14, 1

15, 28, 18, 20, 36, 37, 10, 27, 15, 8

इस उदाहरण में प्रत्येक संख्या एक अवलोकन (Observation) है। इस प्रकार एकत्रित अवलोकनों के समूह को यथा प्राप्त आँकड़े (Raw Data) कहते हैं। अर्थपूर्ण निष्कर्ष निकालने के लिये हमें यथा प्राप्त आँकड़ो को क्रमबद्ध (आरोही या अवरोही) रूप में व्यवस्थित करने की आवश्यकता है।

जैसेः– कक्षा–8 के बच्चों द्वारा 50 में से प्राप्त प्राप्तांकों का आँकड़ा दिया गया है।

1, 8, 8, 10, 14, 15, 15, 18, 20, 25

27, 27, 28, 28, 28, 28, 28, 36, 37, 37

यहाँ अधिकतम प्राप्तांक और न्यूनतम प्राप्तांक का अन्तर 37-1 = 36 है। यही अंतर (36) उपर्युक्त आँकड़ो का परिसर (Range) है।

16.2.1 बारम्बारता बंटन

कौनसा प्राप्तांक सबसे अधिक छात्रों ने प्राप्त किया और कौन–सा प्राप्तांक सबसे कम छात्रों ने प्राप्त किया ? इसके लिए मिलान चिह्नों का प्रयोग करते हुए, निम्न सारणी बनाते हैं –

प्राप्तांक	मिलान चिह्न	बारंबारता
1	I	1
8	II	2
10	I	1
14	I	1
15	II	2
18	I	1
20	I	1
25	I	1
27	II	2
28	~~IIII~~	5
36	I	1
37	II	2
	योग	20

(तालिका 16.1)

प्रत्येक प्राप्तांक के सामने लिखी मिलान चिह्नों की संख्या से हमें उस प्राप्तांक को प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या का पता चलता है। यह संख्या उस प्राप्तांक की बारम्बारता(Frequency) कहलाती है। किसी प्रविष्टि की बारम्बारता वह संख्या है, जितनी बार वह प्रविष्टि आँकड़ों में आती है।

सारणी में प्राप्तांक 28 की बारम्बारता 5 है तथा प्राप्तांक 8, 15, 27 व 37 की बारम्बारता 2 है। उपर्युक्त रूप से बनाई गई सारणी बारम्बारता बंटन सारणी (Frequency Distribution Table) कहलाती है। इससे पता चलता है कि एक प्रविष्टि कितनी बार आई है।

16.2.2 आँकड़ों का वर्गीकरण (वर्ग अन्तराल के रूप में)

कभी–कभी हमें ऐसे आँकड़े प्राप्त होते हैं जिनमें विविधता अधिक होती है, जैसे– किसी कक्षा के 35 विद्यार्थियों के प्राप्तांकों पर विचार कीजिए–

10, 13, 11, 7, 8, 5, 17, 20, 3, 14, 11, 10
8, 1, 13, 8, 10, 18, 14, 5, 3, 4, 13, 14
4, 9, 12, 11, 12, 16, 20, 13, 18, 12, 14

यदि हम प्रत्येक प्रेक्षण (प्राप्तांक) के लिए एक बारम्बारता बंटन सारणी बनाएँ, तो वह बहुत लंबी होती है तथा कई बार अनावश्यक भी हो जाती है। अतः हम सुविधा के लिये प्रेक्षणों के कुछ समूह या वर्ग बनाते हैं, जैसे 0-5, 5-10, 10-15... इत्यादि इस प्रकार उपर्युक्त आँकड़ो के लिए, वर्गीकृत बारम्बारता बंटन सारणी निम्न प्रकार हो सकती है।

वर्ग अंतराल	मिलान चिह्न	बारंबारता
0 - 5	𝍸	5
5 - 10	𝍸 II	7
10 - 15	𝍸 𝍸 𝍸 II	17
15 - 20	IIII	4
20 - 25	II	2
	योग	35

तालिका 16.2

इस सारणी में 35 छात्रों के प्राप्तांक को पाँच के वर्गो (0–5, 5–10 इत्यादि) में विभाजित करके सभी प्रेक्षणों (Observations) को सम्मिलित कर लिया गया है। इसमें प्रत्येक समूह को वर्ग अन्तराल (Class Interval) तथा संक्षेप में एक वर्ग (Class) भी कहते है।

जब आँकड़ों को इस रूप में लिखा जाता है, तब वे वर्गीकृत आँकड़े (Grouped Data) कहे जाते हैं तथा इस प्रकार प्राप्त बंटन को वर्गीकृत बारम्बारता बंटन (Grouped Frequency Distribution) कहते हैं। इससे अर्थपूर्ण निष्कर्ष निकालने में सहायता मिलती है,

जैसे :

(i) 12 विद्यार्थियों ने 0 और 10 के बीच अंक प्राप्त किए हैं।

(ii) अधिकांश विद्यार्थियों ने 10 और 15 के बीच अंक प्राप्त किए हैं।

(iii) 20 अंको की परीक्षा में 4 विद्यार्थियों ने 15 से 20 अंक प्राप्त किए हैं।

(iv) इन आँकड़ों का बहुलक वर्ग 10-15 है।

ध्यान दीजिए की प्रेक्षण 5 दोनों ही वर्गों 0-5 और 5-10 में सम्मिलित हैं। इसी प्रकार प्रेक्षण 10 व 20 भी दो–दो वर्गों में सम्मिलित है। परन्तु कोई भी प्रेक्षण एक साथ दोनों वर्गो में शामिल नहीं हो सकता। इससे बचने के लिए हम एक परिपाटी अपनाते हैं, उभयनिष्ठ प्रेक्षण उच्चतम वर्ग में सम्मिलित करते हैं। अर्थात प्रेक्षण 5, वर्ग अन्तराल 5-10 में सम्मिलित है; न कि 0-5 में

इसी प्रकार 10 वर्ग अन्तराल 10-15 में सम्मिलित है (5-10 में नहीं)।

यहाँ प्रत्येक वर्ग को निश्चित करने के लिये दो संख्याएँ है, जैसे वर्ग अन्तराल 5-10 में 5 और 10 वर्ग सीमाएँ हैं, जिसमें 5 वर्ग की निम्न वर्ग सीमा तथा 10 वर्ग की उच्च वर्ग सीमा कहलाती है। क्या आप वर्ग अन्तराल 15-20 में उच्च वर्ग सीमा तथा निम्न वर्ग सीमा बता सकते हैं ?

किसी भी वर्ग अंतराल की दोनों सीमाओं के अन्तर को वर्ग माप (Class Size) या वर्ग चौड़ाई (Class Width) कहते हैं। यहाँ वर्ग अन्तराल 5 -10 का वर्ग माप 5 है। वर्ग अंतराल 20 – 25 और 15-20 का वर्ग माप क्या है ?

करो और सीखो

1. नीचे दिए गए बारम्बारता बंटन सारणी का अध्ययन कीजिए और उनके नीचे दिए हुए प्रश्नों के उत्तर दीजिए–

(i) वर्ग अंतरालों की माप क्या है?

(ii) वर्ग अन्तराल 300-350 की उच्च सीमा क्या है?

(iii) किस वर्ग की बारम्बारता सबसे अधिक है?

(iv) किन दो वर्गों की बारम्बारता समान है।

वर्ग अंतराल	बारंबारता
100 -150	45
150 - 200	25
200 - 250	55
250 - 300	125
300 - 350	140
350 - 400	65
400 - 450	45
योग	500

(तालिका 16.3)

2. एक कक्षा के 40 छात्रों ने विज्ञान में 50 में से जो अंक प्राप्त किए वे निम्नानुसार हैं –

38, 35, 44, 30, 30, 33, 38, 40, 35, 45, 48, 40 , 35, 45, 38,
35, 44, 33, 40, 42, 45, 38, 35, 33, 34, 37, 47, 49, 37, 47,
40, 31, 38, 43, 31, 37, 41, 38, 45, 40

(i) दिए गए आँकड़ों के वर्ग अन्तराल 30-35 , 35-40, ----------लेकर एक बारम्बारता सारणी बनाइए।

(ii) वर्ग अन्तराल 35-40 की वर्ग सीमाएँ क्या हैं ?

(iii) वर्ग अन्तराल का वर्ग माप क्या है ?

16.3 आयत चित्र – आँकड़ों का आलेखीय निपरूपण

40 विद्यार्थियों द्वारा गणित के टेस्ट में 36 अंको में से प्राप्त किए गए अंको के वर्गीकृत बारम्बारता बंटन पर विचार करें।

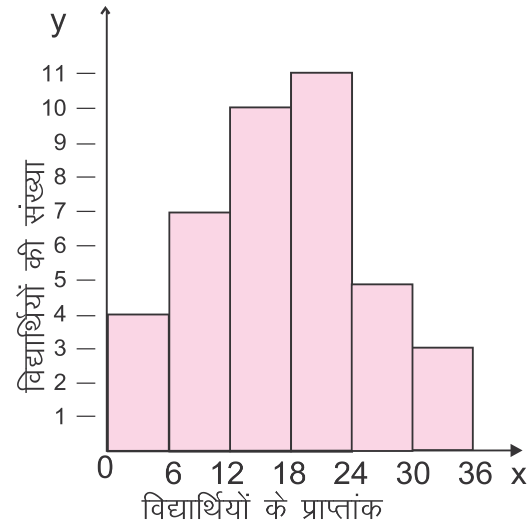
वर्ग अंतराल	बारंबारता
0 - 6	4
6 - 12	7
12 - 18	10
18 - 24	11
24 - 30	5
30 - 36	3
योग	40

(तालिका 16.4)

आलेख 16.4 में उपर्युक्त बारम्बारता बंटन सारणी को दिखाया गया है

क्या यह आलेख उन दंड आलेखों से अलग है, जो आपने पिछली कक्षा में खींचे थे ? स्पष्टतः यहाँ दंडों के बीच कोई रिक्त स्थान नहीं है,क्योंकि वर्ग अन्तरालों के बीच में कोई रिक्तता नहीं है।

दूसरे क्षैतिज अक्ष पर वर्ग अंतरालों (प्रेक्षणों के समूहों) को दिखाया गया है तथा दंड की लम्बाई वर्ग अन्तराल की बारम्बारता दर्शाती है। आँकड़ों का इस प्रकार आलेखीय निरूपण एक आयत चित्र (Histogram) कहलाता है।



आलेख 16.4

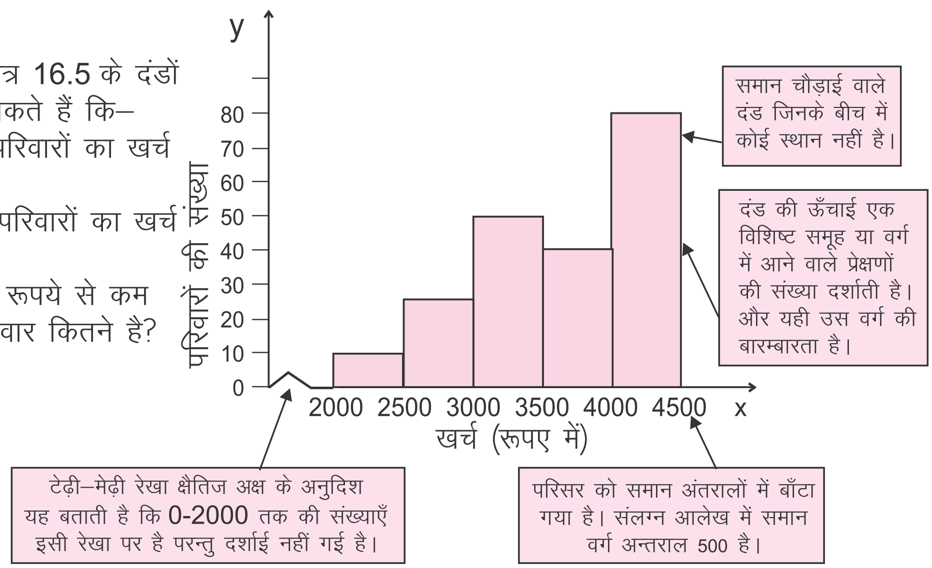
नीचे परिवारो की संख्या एवं उनके खर्च के मध्य आयत का चित्र (आलेख 16.5 बनाया गया है –)

इस आयत चित्र 16.5 के दंडों से हम बता सकते हैं कि–

(i) कितने परिवारों का खर्च न्यूनतम है?

(ii) कितने परिवारों का खर्च अधिकतम है?

(iii) 4000 रूपये से कम खर्च वाले परिवार कितने है?



आलेख 16.5

प्रष्नावली 16.1

1. निम्नलिखित में से किस प्रकार के आँकड़ों को दर्शाने के लिये आप एक आयत चित्र का प्रयोग करेंगे?

(i) घर में उपलब्ध विभिन्न अनाजों की मात्रा।

(ii) अपने विद्यालय के सभी विद्यार्थियों की ऊँचाई।

(iii) 5 कंपनियों द्वारा निर्मित कारों की संख्या।

(iv) एक व्यस्त चौराहे पर प्रातः 8:00 बजे से दोपहर 2 बजे तक गुजरने वाले वाहनों की संख्या।
(v) आपकी कक्षा के सभी छात्रों के घर से विद्यालय की दूरी। (मीटर में)

2. राकेश अपने कपड़ों को रंगों के आधार पर अलग करके इस प्रकार अंकित करता है– सफेद (W), लाल (R), काला (B), पीला (Y), अन्य (X)। बनाई गई सूची निम्न रूप में है –

R R X W R B Y R B W W X X R B Y Y X W R
B Y Y B R R X W W R W X X R Y W B Y X X

मिलान चिह्नों का प्रयोग करते हुए एक बारम्बारता बंटन सारणी बनाइए। इसे प्रदर्शित करने के लिये एक दंड आलेख खींचिए।

3. खटवाड़ा गाँव के 30 नरेगा मजदूरों का एक सप्ताह के पारिश्रमिक भुगतान रूपयों में निम्नलिखित है।

830, 835, 890, 810, 815, 816, 814, 845, 898, 890,
819, 860, 832, 817, 855, 845, 804, 808, 812, 816,
885, 835, 815, 812, 878, 840, 868, 890, 806, 828

मिलान चिह्नों का प्रयोग करते हुए, अंतरालों 800-810, 810-820 वाली एक बारम्बारता सारणी बनाइए। प्राप्त सारणी के लिए आयत चित्र बनाइए।

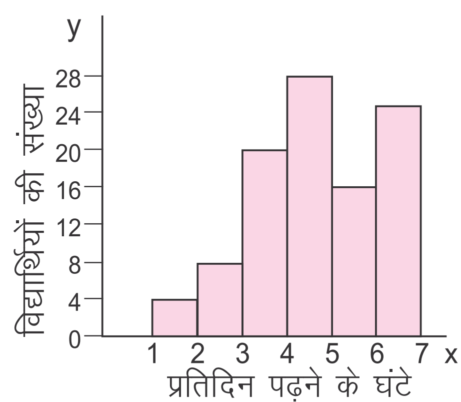
4. मैसर्स राजा इलेक्ट्रॉनिक्स द्वारा 30 दिनों में बेचे गए मोबाइल की संख्या निम्नानुसार है।

222, 228, 238, 215, 225, 219, 217, 230, 218, 237,
214, 210, 235, 222, 220, 214, 212, 220, 237, 212,
238, 218, 210, 216, 217, 234, 233, 237, 219, 239

मिलान चिह्नों का प्रयोग करते हुए, अंतरालों 210-215, 215-220 वाली एक बारम्बारता सारणी बनाइए। प्राप्त सारणी के लिए आयत चित्र बनाइए और निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(i) किस अन्तराल में बेचे गए मोबाइल की संख्या सबसे अधिक है ?
(ii) 230 या उससे अधिक मोबाइल कितने दिन बेचे गए ?
(iii) 230 से कम मोबाइल कितने दिन बिके ?

5. अवकाश के दिनों में कक्षा–8 के विद्यार्थियों द्वारा प्रतिदिन पढ़ने के समय (घंटों में), दिए हुए आलेख में दर्शाए गए हैं।



आलेख **16.6**

निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए –

(i) अधिकतम विद्यार्थियों ने कितने घंटों तक पढ़ाई की ?

(ii) 5 या 5 घंटों से कम समय तक कितने विद्यार्थियों ने पढ़ाई की ?

(iii) कुल कितने विद्यार्थियों ने अवकाश के दिनों में पढ़ाई की ?

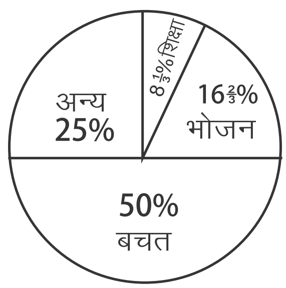
(iv) किस वर्ग अन्तराल की बारम्बारता अधिकतम है ?

16.4 वृत्तआलेख या पाई चार्ट

नीचे वृतीय रूप में निरूपित आँकड़े हैं, उन्हें ध्यान से देखिए –

एक वृत्त आलेख किसी एक सम्पूर्ण के विभिन्न भागों की तुलना करने के लिए प्रयोग किया जाता है। वृत्त एक सम्पूर्ण को दर्शाता है।

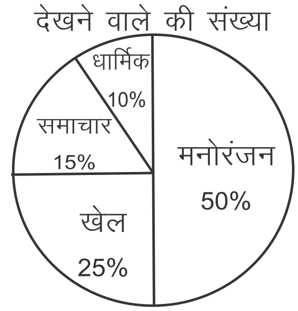
एक परिवार का मासिक बजट



आलेख 16.7 (i)

(i) परिवार द्वारा किस मद पर सबसे कम खर्च किया गया।

टी.वी. पर विभिन्न कार्यक्रम को देखने वाले की संख्या



आलेख 16.7 (ii)

(ii) किस कार्यक्रम को देखने वालों की संख्या सबसे अधिक है।

आपने उपर्युक्त प्रश्नों का हल कैसे ढूँढा ?

आप जानते हैं कि वृत के केन्द्र पर बने कोणों का योग 360^0 डिग्री होता है। आलेख (i) में शिक्षा का क्षेत्र केन्द्र पर सबसे छोटा कोण बना रहा है जबकि आलेख (ii) में मनोरंजन के कार्यक्रम का क्षेत्र सबसे बड़ा कोण बना रहा है। यहाँ सम्पूर्ण वृत्त को त्रिज्यखंडों (Sectors) में विभाजित किया गया है। प्रत्येक त्रिज्य खंड का आकार (Size) उसके द्वारा निरूपित सूचना के समानुपाती होता है। इस प्रकार का निरूपण वृत आलेख (Circle Graphs) या पाई चार्ट (Pie Chart) कहलाता हैं।

16.4.1 पाई चार्ट बनाना

आलेख 16.7 (i) निम्न आँकड़ों का वृत्तीय रूप में निरूपण है: एक परिवार का मासिक बजट निम्न प्रकार है–

बजट	खर्च
भोजन	1500
पढ़ाई	750
अन्य	2250
बचत	4500
कुल आय	9000

(तालिका 16.5)

आइए, इन आँकड़ों को एक पाई चार्ट के रूप में निरूपित करने के चरणों को समझें।

चरण (i) सबसे पहले सभी प्रेक्षणों का योग करते हैं।

$$1500 + 750 + 2250 + 4500 = 9000$$

चरण (ii) प्रत्येक प्रेक्षण (सूचना) को निरूपित करने वाले वृत का भाग (सम्पूर्ण का भाग) ज्ञात करते हैं।

जैसे – भोजन पर खर्च का सम्पूर्ण में भाग (Part)

$$= \frac{\text{भोजन पर खर्च}}{\text{कुल आय}} = \frac{1500}{9000} = \frac{1}{6}$$

अतः भोजन के खर्च को पूरे वृत के $\frac{1}{6}$ वें भाग में खींचा जाएगा।

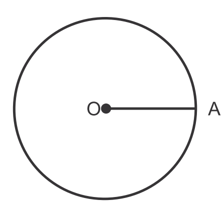
> वृत्त के $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$ आदि हिस्से करना तो सरल है। यदि हमें $\frac{1}{6}$ या $\frac{1}{10}$ आदि हिस्से करने हो तो क्या तरीका काम में लिया जा सकता है?

चरण (iii) सम्पूर्ण केन्द्रीय कोण (360^0) का प्रत्येक खर्च के लिये कोणीय माप ज्ञात करते हैं। जैसा कि तालिका 16.6 में दिखाया गया है।

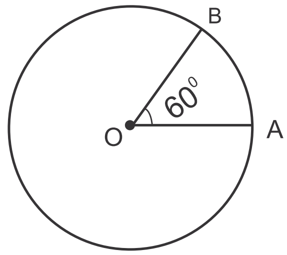
बजट	खर्च	सम्पूर्ण का भाग	360^0 का भाग
भोजन	1500	$\frac{1500}{9000} = \frac{1}{6}$	$360 \times \frac{1}{6} = 60^0$
पढ़ाई	750	$\frac{750}{9000} = \frac{1}{12}$	$360 \times \frac{1}{12} = 30^0$
अन्य	2250	$\frac{2250}{9000} = \frac{1}{4}$	$360 \times \frac{1}{4} = 90^0$
बचत	4500	$\frac{4500}{9000} = \frac{1}{2}$	$360 \times \frac{1}{2} = 180^0$

(तालिका 16.6)

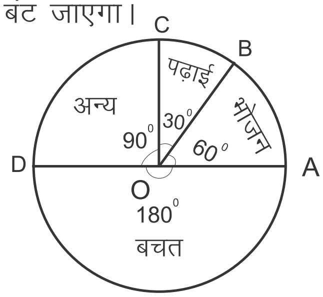
चरण (iv) किसी सुविधाजनक त्रिज्या का एक वृत खींचिए। इसका केन्द्र (O) और त्रिज्या (OA) अंकित कीजिए।



चरण (v) भोजन पर खर्च के त्रिज्यखण्ड का कोण 60^0 है। चाँदे की सहायता से AOB $=\angle 60^0$ खींचिए।



चरण (vi) बचे हुए त्रिज्यखण्डों के कोणों को इसी प्रकार चाँदे से अंकित कीजिए। सम्पूर्ण वृत विभिन्न त्रिज्यखंडों में बंट जाएगा।



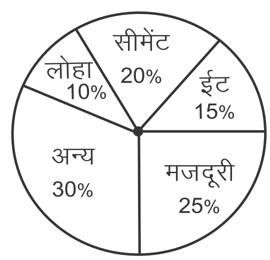
आलेख 16.8

उदाहरण 1 संलग्न पाई चार्ट (आलेख 16.9) एक मकान के बनाने में विभिन्न मदों में खर्च को दर्शाता है।

(i) किस मद में व्यय सबसे अधिक है?

(ii) किन दो मदों का व्यय कुल व्यय का आधा है?

(iii) यदि ईटों का खर्च 30,000 रूपये है तो लोहे पर खर्च क्या है?



आलेख 16.9

हल (i) अन्य मद का व्यय सबसे अधिक है।

(ii) सीमेंट और अन्य का व्यय कुल व्यय का आधा है।

(iii) $\because$ 15% निरुपित करता है = 30,000 रू

$\therefore$ 1% निरूपित करेगा $= \dfrac{30,000}{15}$ रू

अतः 10%निरूपित करेगा $= \dfrac{30,000}{15} \times 10 = 20,000$ रू

उदाहरण 2 एक विशेष दिन एक विद्यालय में छात्रों की उपस्थिति निम्न प्रकार है।

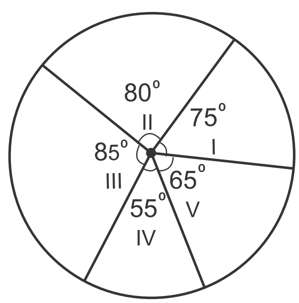
वर्ग	I	II	III	IV	V
छात्रों की संख्या	15	16	17	11	13

इन आँकड़ों के लिए एक पाई चार्ट खींचिए।

हल हम प्रत्येक त्रिज्यखण्ड का केन्द्रीय कोण ज्ञात करते हैं। यहाँ कुल छात्र 72 है। इससे हमें निम्न सारणी प्राप्त होती है।

वर्ग	छात्रों की सं.	संपूर्ण का भाग	360° का भाग
I	15	$\frac{15}{72}$	$360 \times \frac{15}{72} = 75^\circ$
II	16	$\frac{16}{72}$	$360 \times \frac{16}{72} = 80^\circ$
III	17	$\frac{17}{72}$	$360 \times \frac{17}{72} = 85^\circ$
IV	11	$\frac{11}{72}$	$360 \times \frac{11}{72} = 55^\circ$
V	13	$\frac{13}{72}$	$360 \times \frac{13}{72} = 65^\circ$

(तालिका 16.7)



आलेख 16.10

करो और सीखो

(1) किसी विद्यालय मे विद्यार्थियों द्वारा पसंद की जाने वाली मिठाईयाँ नीचे दी गई है। दिए गए आँकड़ों के आधार पर पाई चार्ट बनाइए।

मिठाई	जलेबी	लड्डू	पेड़ा	गुलाब जामुन	अन्य
छात्रों की संख्या	40%	20%	25%	10%	5%

(2) अपने पाँच साथियों के परिवार में सदस्यों की संख्या को लिखें और उसे पाई चार्ट द्वारा दर्शाएँ।

प्रश्नावली 16.2

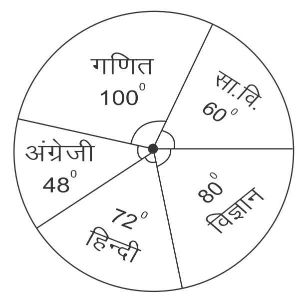
1. किसी विद्यालय में विभिन्न विषयों की पुस्तकें नीचे दी गई है। इन आँकड़ो को एक पाई चार्ट द्वारा प्रदर्शित कीजिए।

विषय	विज्ञान	गणित	अंग्रेजी	हिन्दी	सा॰ विज्ञान	योग
पुस्तकों की संख्या	200	120	190	170	40	720

2. एक बालक की प्रतिदिन क्रियाओं का ब्यौरा इस प्रकार है। इन आँकड़ों को एक पाई चार्ट द्वारा प्रदर्शित कीजिए।

व्यतीत किया समय	सोना	विद्यालय	खेलने	अन्य
घंटे	8 घंटे	6 घंटे	2 घंटे	8 घंटे

3. संलग्न पाई चार्ट 16.11 एक विद्यार्थी द्वारा किसी परीक्षा में हिंदी, अंग्रेजी, गणित, सा. विज्ञान और विज्ञान में प्राप्त किए गए अंकों को दर्शाता है। यदि उस विद्यार्थी द्वारा प्राप्त किए गए कुल अंक 900 थे, तो निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए।
   (i) किस विषय में उस विद्यार्थी ने 250 अंक प्राप्त किए?
   (ii) उस विद्यार्थी ने गणित में हिन्दी से कितने अधिक अंक प्राप्त किए?
   (iii) जाँच कीजिए कि क्या सामाजिक विज्ञान और गणित में प्राप्त किए गए अंकों का योग अंग्रेजी और हिन्दी में प्राप्त किए गए अंकों के योग से अधिक है ?



आलेख 16.11

4. निम्नलिखित सूचना को दर्शाने वाला एक पाई चार्ट खींचिए। यह सारणी किसी कक्षा के विद्यार्थियों द्वारा पसंद किए जाने वाले खेलों को दर्शाती है।

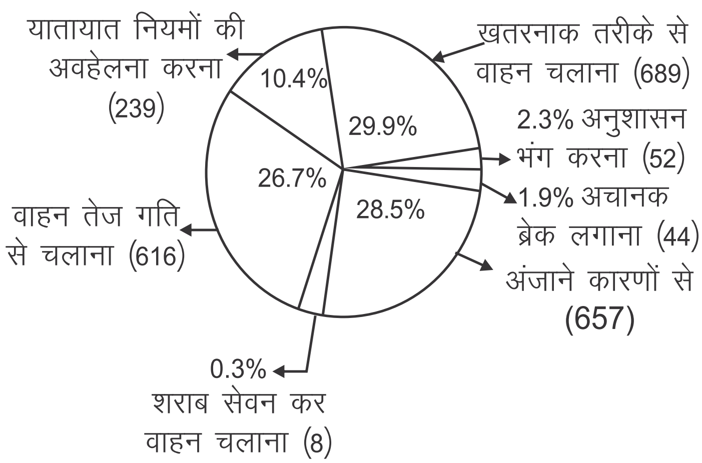
खेल	खो–खो	कबड्डी	फुटबाल	क्रिकेट
विद्यार्थियों की संख्या	5	6	7	18

5. भारत सरकार की जनधन योजना के अन्तर्गत कोटा शहर में एक माह में निम्न बैंकों में खोले गए खातों की संख्या को पाई चार्ट में प्रदर्शित कीजिए–

बैंक का नाम	SBBJ	SBI	IDBI	BOI
खोले गए खातों की संख्या	21000	18000	6000	9000

6. नीचे दिए गए पाई चार्ट में वाहन चालकों की विभिन्न गलतियों को दर्शाया गया है। पाई चार्ट की सहायता से निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(i) तेज गति से वाहन चलाने पर कितने प्रतिशत दुर्घटना होती है ?
(ii) सबसे ज्यादा दुर्घटनाएँ वाहन चालक की किस गलती से होती है ?
(iii) शराब का सेवन कर वाहन चलाने से कितनी दुर्घटना हुई ?
(iv) यातायात नियमों की अवहेलना करने पर कितने लोग दुर्घटना ग्रस्त हुए ?



आलेख 16.12

आओ चर्चा करें–
आजकल भागदौड़ की जिंदगी में कई तरह की दुर्घटनाएँ होती है। जिनमें से सर्वाधिक सड़क दुर्घटनाएँ होती है।
यह इस प्रकार है:
(1). वाहन चालक की गलती
(2) पीड़ित की गलती
(3) वाहन की तकनीकी खराबी
(4) सड़क की खराब स्थिति
(5). सड़क परिस्थिति/खराब सड़क बनावट
(6). अज्ञान/अन्य
आओ अध्यापक जी के साथ इन कारणों पर चर्चा करें एवं एक प्रोजेक्ट बनाएँ।

16.5 संयोग और प्रायिकता

16.5.1 संयोग से अभिप्राय

विशाल ने रवि से कहा– मैं रोज विद्यालय आते समय घर से छाता लेकर आता हूँ, परन्तु बरसात नहीं होती है। आज मै भूलवश छाता लेकर नहीं आया तो संयोग से बरसात हो रही है।

रवि ने कहा– अरे यार ऐसा मेरे साथ भी होता है जब मैं रोज विद्यालय जाने के लिए समय पर बस स्टेण्ड आता हूँ तो बस देरी से आती है, जिस दिन में देर से पहुँचता हूँ बस समय पर निकल जाती है।

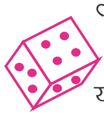
तभी राकेश बोला– मेरे साथ अक्सर यह होता है जब मैं गृहकार्य पूर्ण नहीं कर पाता संयोग से अध्यापक महोदय गृहकार्य जाँच करते ही नहीं है।

आपको उपर्युक्त प्रकार की अनेक स्थितियों का सामना करना पड़ता है जहाँ आप संयोग (Chance) का सहारा लेकर कार्य करना चाहते हैं परन्तु वह उस प्रकार से नहीं होता जैसा आप

चाहते हैं। क्या आप ऐसे कुछ और उदाहरण दे सकते है?

जब कोई व्यक्ति लॉटरी की टिकिट खरीदता है तो उसके जीतने व हारने का संयोग बराबर नहीं होता, अतः जीतने की संभावना बहुत कम व हारने की संभावना बहुत अधिक होती है, परन्तु यहाँ हम कुछ ऐसे प्रयोगों की बात करेंगे जिनके परिणामों के घटित होने के संयोग बराबर है।

16.5.2 पासा (DICE) और सिक्का (COIN) उछालने पर प्राप्त संभावनाओं की गणना



लविना और नीमा पासे से खेल रहे थे, तभी लविना ने नीमा से कहा कि पासे मे छः सबसे कम बार आता है। आप क्या सोचते है? क्या ऐसा ही होता है,................

यह जानने के लिए कि क्या 6 अन्य अंकों 1,2,3,4,5 से वास्तव में कम आता है अथवा नहीं।

लविना और नीमा ने 30–30 बार पासे को फेंका। प्राप्त अंकों की एक बारम्बारता सारणी बनाई

लविना द्वारा 30 बार फेंके पासे के लिए सारणी

1	2	3	4	5	6
卌 III	卌 I	III	III	卌 I	IIII

आप भी पासा लेकर देखें कि 30 बार फेंकने पर आपको प्राप्त अंको की सारणी कैसी बनती है? अतः यह जरूरी नहीं है कि कोई अंक कम आए अथवा ज्यादा। पासे पर किसी भी अंक के आने की संभावना बराबर है।

इस प्रकार का प्रयोग एक यादृच्छिक प्रयोग (Random Experiment) कहलाता है।

1, 2, 3, 4, 5, व 6 इस प्रयोग के छः परिणाम है।

जब एक सिक्के को उछाला जाता है, तो आपको क्या संभव परिणाम प्राप्त होते हैं? निः संदेह, चित (Head) या पट (Tail)। कल्पना कीजिए कि आप एक टीम के कप्तान है और आपका मित्र दूसरी टीम का कप्तान है। आप एक सिक्का उछालते है और अपने मित्र से चित या पट बोलने को कहते है।

क्या आप इस उछाल के परिणाम पर कोई नियंत्रण रख सकते हैं?

क्या आपको चित प्राप्त हो सकता है? अथवा क्या आपको पट प्राप्त हो सकता है? नहीं ऐसा संभव नहीं है। इस प्रकार का प्रयोग एक यादृच्छिक प्रयोग (Random Experiment) कहलाता है। चिट और पट इस प्रयोग के दो परिणाम (Outcomes) है।

16.5.3 सम संभावित परिणाम

अपनी कक्षा के बच्चों को 3-4 की टोलियों मे बाँटकर प्रत्येक टोली को एक सिक्का दे दीजिए। कहिए कि वे सिक्के को कई बार उछालें और हर बार नोट करें कि चित आया या पट।

प्रत्येक टोली इन आँकड़ों को तालिका 1 में बनाए अनुसार दो कॉलम में दर्ज कर सकती है। आइए अपने परिणाम शीट (तालिका) को देखें, जहाँ हम उछालों की संख्या में वृद्धि करते जा रहे हैं।

उछालों की सं.	मिलान चिन्ह (H)	चितों की सं.	मिलान चिन्ह (T)	पटों की संख्या
40	卌 卌 卌 卌 ||	22	卌 卌 卌 |||	18
50	卌 卌 卌 卌 |||	23	卌 卌 卌 卌 卌 ||	27
60	卌 卌 卌 卌 卌 ||||	29	— — —	31
70	— — —	33	— — —	37
80	— — —	38	— — —	42
90	— — —	44	— — —	46

तालिका 16.8

ध्यान दीजिए कि जब आप उछालों की संख्या को अधिकाधिक बढ़ाते जाते हैं, तब चितों की संख्या और पटों की संख्या परस्पर अधिकाधिक निकट आती जाती हैं।

ऐसा ही एक पासे के साथ भी हो सकता है, जब उसे एक बड़ी संख्या में फेंका जाता हैं। छः परिणामों में से प्रत्येक की संख्या परस्पर लगभग बराबर हो जाती है।

ऐसी स्थिति में, हम कह सकते हैं कि प्रयोग के विभिन्न परिणाम समसंभावित या समप्रायिक (equally likely) हैं। इसका अर्थ यह है कि सभी में से प्रत्येक परिणाम के आने का संयोग (chance) एक ही है।

16.5.4 अनुकूल संभावनाओं की गणना (प्रायिकता)

जब हम एक सिक्का उछालते हैं तो यहाँ चित प्राप्त करने की संभावना 2 परिणामों (चित और पट) में से 1 है अर्थात $\frac{1}{2}$ है। दूसरे शब्दों में हम कह सकते हैं कि एक चित प्राप्त करने की प्रायिकता (probablity) $=\frac{1}{2}$ है। एक पट प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है ? यहाँ दोनों ही परिणाम समप्रायिक (equally likely) हैं।

अब यदि आप एक पासे को फेंकें, तो परिणाम क्या प्राप्त होंगे ? स्पष्ट है: 1,2,3,4,5,6 में से कोई एक, यहाँ छः समप्रायिक परिणाम है। इसमें 3 प्राप्त करने की प्रायिकता क्या होगी ?

यह प्रायिकता है $\frac{1}{6}$ $\begin{array}{l} \longrightarrow \text{3 देने वाले परिणामों की संख्या} \\ \longrightarrow \text{समप्रायिक परिणामों की संख्या} \end{array}$

प्रत्येक प्रयोग के प्रत्येक परिणाम के संग्रह से एक घटना बनती है। उदाहरणार्थ एक सिक्के को उछालने के प्रयोग में एक चित प्राप्त करना एक घटना है तथा पट प्राप्त करना भी एक घटना है। एक पासे को फेंकने की स्थिति में परिणामों 1,2,3,4,5,6 में से प्रत्येक परिणाम प्राप्त करना एक घटना है।

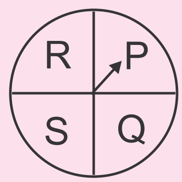
जैसे एक सम संख्या प्राप्त करने की प्रायिकता $\frac{3}{6}$ है

3 = उन परिणामों की संख्या जो घटना बनाते है (2,4,6)

6 = कुल संभव परिणामों की संख्या

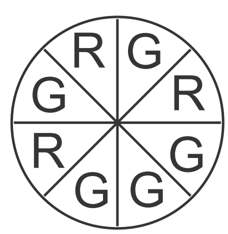
करो और सीखो

1. जब एक पासे (dice) को फेंका जाता है, तो संभव छः परिणाम क्या है?
2. जब आप निम्न पहिए को घुमाएँगे, तो संभावित परिणाम क्या होंगे? इनकी सूची बनाइए। (यहाँ परिणाम का अर्थ है कि वह त्रिज्यखण्ड जहाँ पर सूचक (Pointer) घुमाने पर रूकेगा।



3. आपके पास एक थैला है और उसमें भिन्न–भिन्न रंगो की सात एक जैसी गेंदे है। आप बिना देखे इसमें से एक गेंद निकालते हैं। प्राप्त होने वाले परिणामों को लिखिए।

उदाहरण 3 यदि आपके पास 5 हरे त्रिज्यखण्ड, 3 लाल त्रिज्यखण्ड वाला एक घूमने वाला पहिया है तो (i) लाल त्रिज्यखण्ड प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है ? (ii) ऐसा त्रिज्यखण्ड प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है जो लाल न हो?



हल यहाँ घटना के कुल परिणाम (5+3) = 8 हैं। लाल त्रिज्यखण्ड प्राप्त करने के लिए 3 परिणाम है।

अतः लाल त्रिज्यखण्ड प्राप्त करने की प्रायिकता $\frac{3}{8}$ है।

ऐसे त्रिज्य खण्डों की संख्या जो लाल नहीं है = 5

अतः ऐसे त्रिज्यखण्ड प्राप्त करने की प्रायिकता जो लाल न हो = $\frac{5}{8}$

प्रश्नावली 16.3

1. एक सिक्का उछालने पर चित आने की क्या प्रायिकता है?
2. एक थैले में 6 सफेद, 11 लाल और 7 पीले रंग की गेंद हैं। उस थेले में से एक सफेद गेंद निकालने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
3. अच्छी तरह से फेंटी हुई 52 ताशों की एक गड्डी में से 1 बेगम प्राप्त करने की प्रायिकता क्या होगी ?
4. जब एक पासे को फेंका जाता है तब निम्नलिखित प्रत्येक घटना की प्रायिकता लिखिए।
   (i) एक अभाज्य संख्या (ii) एक अभाज्य संख्या नहीं
   (iii) 3 से बड़ी एक संख्या (vi) 5 से बड़ी संख्या नहीं
   (v) एक विषम संख्या
5. 15 अलग–अलग पर्चियों पर 1 से 15 तक संख्याएँ लिखी हुई हैं (एक पर्ची पर एक संख्या) उन्हें एक डिब्बे में रखकर अच्छी तरह मिला दिया जाता है। डिब्बे के अन्दर से बिना देखे एक पर्ची निकाली जाती है। निम्नलिखित की प्रायिकता क्या होगी–
   (i) संख्या 5 प्राप्त करना
   (ii) दो अंक की एक संख्या प्राप्त करना
   (iii) 1 अंक की एक संख्या प्राप्त करना।

हमने सीखा

1. हमारे पास अधिकतर उपलब्ध आँकड़े जो असंगठित रूप में होते हैं। उन्हें यथा प्राप्त आँकड़े कहा जाता है।
2. किन्हीं भी आँकड़ों से अर्थपूर्ण निष्कर्ष निकालने के लिये हमें उन्हें क्रमबद्ध रूप में संगठित करने की आवश्यकता पड़ती है।
3. बारम्बारता वह संख्या दर्शाती है जितनी बार कोई एक विशिष्ट प्रविष्टि आँकड़ों में आती है।
4. यथाप्राप्त आँकड़ों के समूह बनाए जा सकते हैं और उन्हें एक क्रमबद्ध प्रकार से 'वर्गीकृत बारंबारता बंटन' के रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है।
5. वर्गीकृत आँकड़ों को आयतचित्र का प्रयोग करते हुए प्रदर्शित किया जा सकता है। आयत चित्र एक प्रकार का दंड आलेख है, जिसमें क्षैतिज अक्ष पर वर्ग अंतरालों को दर्शाया जाता है तथा दंडों की लंबाइयाँ वर्ग अंतरालों की बारंबारताएँ दर्शाती हैं। साथ ही, दंडों के बीच में कोई रिक्तता नहीं होती, क्योंकि वर्ग अंतरालों के बीच में कोई रिक्तता नहीं है।
6. आँकड़ों को वृत आलेख या पाई–चार्ट का प्रयोग करके भी प्रस्तुत किया जा सकता है। एक वृत्त आलेख एक संपूर्ण और उसके भागों में संबंध को दर्शाता है।
7. कुछ ऐसे प्रयोग होते हैं जिनमें परिणामों के आने के संयोग बराबर होते हैं।
8. एक यादृच्छ प्रयोग वह प्रयोग है जिसमें परिणामों की ठीक–ठीक प्रागुक्ति (भविष्यवाणी) पहले से नहीं की जा सकती है।
9. किसी प्रयोग के परिणाम सम संभावित या समप्रायिक कहलाते हैं, यदि उनके आने के संयोग बराबर हों।
10. एक घटना की प्रायिकता $= \dfrac{\text{घटना को बनाने वाले परिणामों की संख्या}}{\text{प्रयोग के परिणामों की कुल संख्या}}$
11. किसी प्रयोग के एक या अधिक परिणामों से एक घटना बनती है।

उत्तरमाला

प्रश्नावली 1

1. (i) $\frac{7}{4}$ (ii) $\frac{-19}{30}$ (iii) $\frac{-2}{3}$ (iv) $\frac{34}{15}$ (v) $\frac{-107}{35}$ (vi) $\frac{-28}{57}$

2. (i) $\frac{23}{12}$ (ii) $\frac{44}{9}$ (iii) $\frac{-1}{2}$ (iv) $\frac{-22}{63}$ (v) $\frac{-27}{91}$ (vi) $\frac{-104}{15}$

3. (i) $\frac{13}{3}$ (ii) 1 (iii) $\frac{6}{35}$ (iv) $\frac{35}{12}$ (v) $\frac{9}{10}$ (vi) $\frac{-133}{18}$

4. (i) -10 (ii) 1 (iii) $\frac{-3}{2}$ (iv) $\frac{91}{36}$ (v) $\frac{-19}{55}$ (vi) $\frac{-3}{4}$

5. (i) $\frac{59}{30}$ (ii) $\frac{-11}{9}$ (iii) $\frac{7}{9}$ (iv) $\frac{-3}{7}$

6. (i) $\frac{-181}{315}$ (ii) 0

7. (i) $\frac{-7}{19}$ (ii) $\frac{9}{5}$ (iii) $\frac{-3}{7}$ (iv) $\frac{5}{9}$ (v) $\frac{-13}{17}$ (vi) $\frac{21}{31}$

8. (i) $\frac{-1}{17}$ (ii) $\frac{-17}{11}$ (iii) $\frac{5}{3}$ (iv) $\frac{-19}{13}$

9. $\frac{-75}{49}$

10. (i) परिमेय (ii) धनात्मक (iii) अनिर्धारित (iv) शून्य (v) एक
(vi) व्युत्क्रम (vii) बाईं (viii) दाईं (ix) शून्य (x) एक

11. (i) $\frac{-21}{8}, \frac{-9}{4}, \frac{-3}{2}, \frac{-3}{4}, \frac{-3}{8}$ आदि (ii) $\frac{5}{12}, \frac{5}{24}, \frac{5}{8}, \frac{25}{48}$ आदि

(iii) $\frac{-17}{48}, \frac{1}{24}, \frac{21}{48}$ आदि

प्रश्नावली 2.1

1. 243, 100, 2700

2. (i) 2 (ii) 2 (iii) 5 (iv) 7

3. (i) 3 (ii) 2 (iii) 3 (iv) 5 4. 6

प्रश्नावली 2.2

1. (i) सही (ii) सही (iii) गलत (iv) सही (v) गलत (vi) सही

2. (i) 4 (ii) 7 (iii) 18 (iv) 42 (v) 15 (vi) 22 (vii) 36 (viii) 45

प्रश्नावली 3.1

1. (i) $\frac{1}{343}$ (ii) $\frac{16}{25}$ (iii) -5 (iv) $\frac{16}{9}$
2. (i) -125 (ii) $\frac{1}{8}$ (iii) $\frac{16}{81}$
3. (i) $\frac{1}{2^6}$ (ii) $\frac{2^4}{5^3}$ (iii) $\left(\frac{-2}{3}\right)^3$ (iv) $\left(\frac{-1}{2}\right)^3$ (v) $-\left(\frac{5}{7}\right)^2$
4. (i) 243 (ii) $\frac{1}{32}$ (iii) $\frac{243}{32}$ (iv) $\frac{-1}{128}$ (v) $\frac{-32}{3125}$
5. (i) 4^3 (ii) $(-5)^3$ (iii) $\frac{2}{3}$ (iv) $\left(\frac{-1}{5}\right)^5$
6. (i) 729 (ii) 64 (iii) 625 (iv) 256 (v) $\frac{1}{256}$ (vi) $\frac{1}{729}$
7. (i)1 (ii) 1 (iii) 1 (iv) 1 (v) 1 (vi) 2 (vii) 2
8. (i) $\frac{1}{2^3}$ (ii) $\frac{1}{3^5}$ (iii) $\frac{1}{a^4}$ (iv) $\frac{1}{(-2)^5}$ (v) $\frac{1}{(-x)^3}$ (vi) 5^3 (vii) y^3 (viii) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$
9. (i)11664 (ii) $\frac{375}{576}$ (iii) $\frac{243}{1372}$ (iv) $\frac{1}{256}$ (v) $\frac{625}{81}$ (vi) $\frac{1}{64}$
10. 29

प्रश्नावली 3.2

1. (i) $\frac{3}{5}$ (ii) $\frac{25}{36}$ (iii) $\frac{125}{512}$ (iv) 15
2. (i) 125 (ii) $625t^4$ (iii) $\frac{614656}{3}$ (iv) $\frac{1}{20}$ (v) $\frac{1458}{625}$
3. (i) 3 (ii) 2 (iii) 2
4. (i) $\frac{80}{243}$ (ii) $\frac{8}{3}$

प्रश्नावली 3.3

1. (i) 1.28×10^8 (ii) 1.68×10^9 (iii) 5×10^{-4} (iv) 1.7×10^{-7} (v) 3.97×10^{-10} (vi) 4.358×10^{-8}
2. (i)4000000000 (ii) 2450000000 (iii) 56172900 (iv) 0.0000085 (v) 0.00000302 (vi) 0.0007
3. (i) 2×10^{-4} (ii) 1.6×10^{-19} (iii) 1×10^{-6} (iv) 1.6×10^{-3}

प्रश्नावली 4.1

1. 3
2. 1
3. 0,9
4. 0, 3, 6, 9
5. (i)3 से विभाजित (ii) 3,9,11 से विभाजित (iii) 3, 9 से विभाजित
7. 0, 3, 6, 9

प्रश्नावली 4.2

1. (i) A= 8 B= 9 (ii) A= 4 B= 3 C= 1 (iii) A= 2 B= 5
   (iv) A= 2 B= 7 (v) A= 8 B= 1 (vi) A= 6
   (vii) A= 2 B= 5 C= 1 (viii) A= 7 B= 4
2. (i) 4 (ii) 3 (iii) 1 (iv) 9 (v) 6 (vi) 4 (vii) 7 (viii) 3

प्रश्नावली 5

1. (i) 10605 (ii) 165 (iii) 1458 (iv) 15609
2. (i) 2448 (ii)783 (iii) 1224 (iv) 378 (v) 10626
   (vi) 23436 (vii) 884640 (viii) 5832 (ix) 970299

3. (i) भागफल = 142

शेषफल = 11

(ii) भागफल = 74

शेषफल = 14

(iii) भागफल = 90

शेषफल = 16

प्रश्नावली 6.1

1. (1) (iii), (iv), (v), (vi).
   (2) (i),(ii).
   (3) (i) अवतल (ii) अवतल (iii) उत्तल (iv) उत्तल (v) उत्तल (vi) उत्तल

2. (i) a, b, c, d, e (ii) p, q, r, s, t

3. तीन या तीन से अधिक समान भुजाओं वाली बन्द आकृति।
   (i) पंचभुज (ii) षट्भुज (iii) अष्टभुज

4. (i) 60° (ii) 140° (iii) 108° (iv) $x = 90^\circ$ $y = 120^\circ$ $z = 150^\circ$
   (v) $x = 60^\circ$, $y = 100^\circ$, $z = 120^\circ$, $w = 80^\circ$

5. 8 6. 24 7. 15 8. 144

9. नहीं 10. 111° 11. 135° 12. 900°

प्रश्नावली 6.2

1. (i) संपूरक (ii) बराबर (iii) 80° (iv) समचतुर्भुज (v) समरूप

2. $x = 70^\circ$, $y = 70^\circ$, $z = 110^\circ$

3. (i) $x = 90^\circ$, $y = 45^\circ$, $z = 45^\circ$ (ii) $x = 28^\circ$ $y = 112^\circ$ $z = 28^\circ$

4. 30°, 150°, 30°, 150°

5. (i) $x = 6$, $y = 9$ (ii) $x = 3$, $y = 13$

6. $x = 3$ 7. $x = 5$ सेमी , $y = 12$ सेमी, $z = 13$ सेमी 8. $x = 90^\circ$, $y = 50^\circ$

प्रश्नावली 7.1 से 7.6

क्रियाविधि आधारित

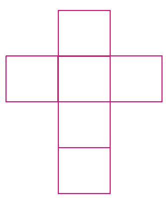
प्रश्नावली 8.1

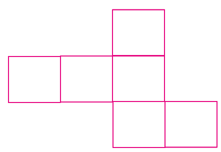
1. (i) त्रिभुज (ii) सर्वांगसम (iii) 15 (iv) प्रिज्म

4. (i) एवं (ii) बहुफलकीय
   (i) घनाभ एवं पिरामिड़
   (ii) प्रिज्म एवं पिरामिड़

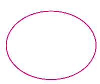
प्रश्नावली 8.2

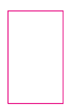
1.



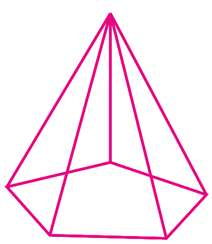


2.

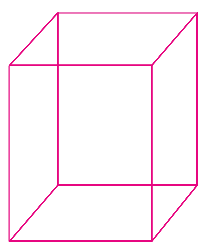




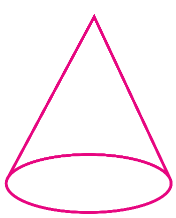
3. (i)



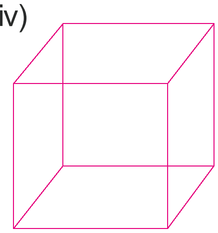
(ii)



(iii)



(iv)



प्रश्नावली 9.1

1. (i) $15x$ (ii) $10pq$ (iii) $-21l^2n^2$ (iv) $18mn$ (v) $10x^3$

2.

X	7	x	y	2z	a	-5b	c
7	49	$7x$	$7y$	$14z$	$7a$	$-35b$	$7c$
x	$7x$	x^2	xy	$2zx$	ax	$-5bx$	cx
$2y$	$14y$	$2xy$	$2y^2$	$4yz$	$2ay$	$-10by$	$2cy$
$-3a$	$-21a$	$-3ax$	$-3ay$	$-6az$	$-3a^2$	$15ab$	$3ac$
b	$7b$	bx	by	$2bz$	ab	$-5b^2$	bc
y	$7y$	xy	y^2	$2yz$	ay	$-5by$	cy
$2x^3$	$14x^3$	$2x^4$	$2x^3y$	$4x^3z$	$2x^3a$	$-10x^3b$	$2x^3c$
a^4	$7a^4$	a^4x	a^4y	$2a^4z$	a^5	$-5a^4b$	a^4c
z^2	$7z^2$	xz^2	yz^2	$2z^3$	az^2	$-5bz^2$	cz^2

3. (i) x^5y^3 (ii) m^6n^6 (iii) $k^3l^3m^3$

4. x^3y

प्रश्नावली 9.2

1. (i) $6x^2+x-35$ (ii) $3xy+5x-24y-40$ (iii) $2.25p^2-0.25q^2$ (iv) $ax+5a+3bx+15b$
   (v) $6l^2m^2-lm^2-15m^4$ (vi) $3a^4+\frac{43}{4}a^2b^2-5b^4$

2. (i) $-6x^2-x+40$ (ii) $3x^2+8xy-3y^2$ (iii) $a^3+a^2b^2+ab+b^3$ (iv) $2p^3+p^2q-2pq^2-q^3$

3. (i) x^2-2x (ii) $3a^2+a^2b^2-3b^2-4$ (iii) $t^3-s^3+s^2t^2-ts$ (iv) $4ab+2bc+2bd$
   (v) a^3+b^3 (vi) $a^2+2ab+b^2-c^2$ (vii) 0

प्रश्नावली 9.3

1. (i) $x^2+10x+25$ (ii) $9x^2+12x+4$ (iii) $25a^2-70a+49$ (iv) $9p^2-3p+\frac{1}{4}$
   (v) $1.44m^2-0.72m+0.09$ (vi) x^4-y^4 (vii) $49-36y^2$ (viii) $49a^2-81b^2$

2. (i) x^2+3x+2 (ii) $9x^2+18x+5$ (iii) $16x^2-24x+5$ (iv) $9a^2-9a-40$ (v) $x^2y^2z^2-3xyz+2$

3. (i) $b^2-14b+49$ (ii) $x^2y^2+6xyz+9z^2$ (iii) $36m^4-60m^2n+25n^2$ (iv) $\frac{9}{4}x^2+2xy+\frac{4}{9}y^2$

4. (i) $a^4-2a^2b^2+b^4$ (ii) 40n (iii) $98m^2+128n^2$ (iv) $m^4+n^4m^2$

6. (i) 9801 (ii) 10609 (iii) 89991 (iv) 6396

7. (i) 400 (ii) 12 (iii) 1800

8. (i) 10506 (ii) 51.83 (iii) 10098 (iv) 94.08

प्रश्नावली 10.1

1. (i) 12 (ii) 14pq (iii) 6ab (iv) $4x$ (v) 10 (vi) x^2y^2

2. (i) 6(p-2q) (ii) 7a(a+2) (iii) $5(2a^2-3b^2+4c^2)$ (iv) $xy(ax+by+cz)$
   (v) $xyz(x+y+z)$ (vi) $4z(-8+5z^2)$

3. (i) $(x+1)(2y+3)$ (ii) $(xy+1)(z-7)$ (iii) $(2y-3)(3x-2)$ (iv) $(5p+3)(3q+5)$

प्रश्नावली 10.2

1. (i) (a+2)(a-2) (ii) (a+7b)(a-7b) (iii) p(p+11)(p-11) (v) (a-b+c)(a-b-c)
   (v) $(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$ (vi) $5x(x+5)(x-5)$ (vii) 7(3a+4b)(3a-4b)
   (viii) $(3xy+4)(3xy-4)$ (ix) 4lm

2. (i) $x(lx+m)$ (ii) $2x(x^2+y^2+z^2)$ (iii) (a+b)(a+4) (iv) $(x+1)(y+1)$
   (v) (a-3)(5a+2c) (vi) $(a+b)(m^2+n^2)$

3. (i) $(x+2)(x+3)$ (ii) (q+8)(q+3) (iii) (m-7)(m-3) (iv) $(x+8)(x-2)$
   (v) $(x-9)(x+2)$ (vi) $(x-17)(x+6)$ (vii) (y+8)(y-6) (viii) (d-9)(d+5)
   (ix) (m+9)(m+7) (x) (n-23)(n+4) (xi) (p-8)(p-2) (xii) $(x+9)(x-5)$

प्रश्नावली 10.3

1. (i) $\frac{1}{2}x^3$ (ii) -4y (iii) $\frac{2}{3}x^2y$ (iv) $-2a^2b^4$

2. (i) $(\frac{5}{3})x-2$ (ii) $(\frac{x^2}{2})+x+\frac{3}{2}$ (iii) q^3-p^3 (iv) $3x^4-4x^2+5$

3. (i) 6y (ii) xy (iii) 5y+7 (iv) 3

4. (i) (y+2) (ii) $5(x-4)$ (iii) $3(3x-4y)$ (iv) $2z(z-2)$

प्रश्नावली 11.1

(1) 4	(2) 6	(3) 3	(4) 13	(5) 4
(6) 2	(7) 3	(8) 10	(9) $(\frac{-4}{5})$	(10) 8

प्रश्नावली 11.2

(1) $\frac{4}{7}$	(2) 7	(3) 5	(4) 300000रु	(5) 16
(6) 32, 13	(7) 8, 24 वर्ष	(8)19मी,13मी	(9) 39	(10) 28 या 82

प्रश्नावली 12.1

(1) (i) 3 (ii) -2 (iii) -3 (iv) चतुर्थ (v) - 4

(2) (i) भुज 2, कोटि 1; (2,1)

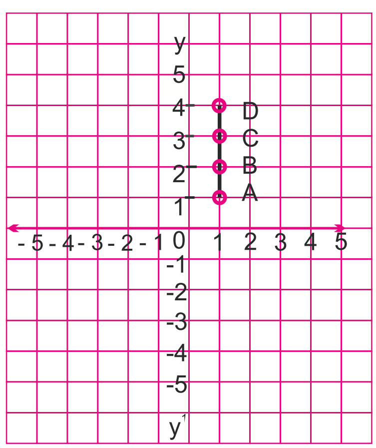
(ii) भुज -3 कोटि 2; (-3,2)

(iii) -4,-3, (-4,-3)

(iv) 3,-2, (3,-2)

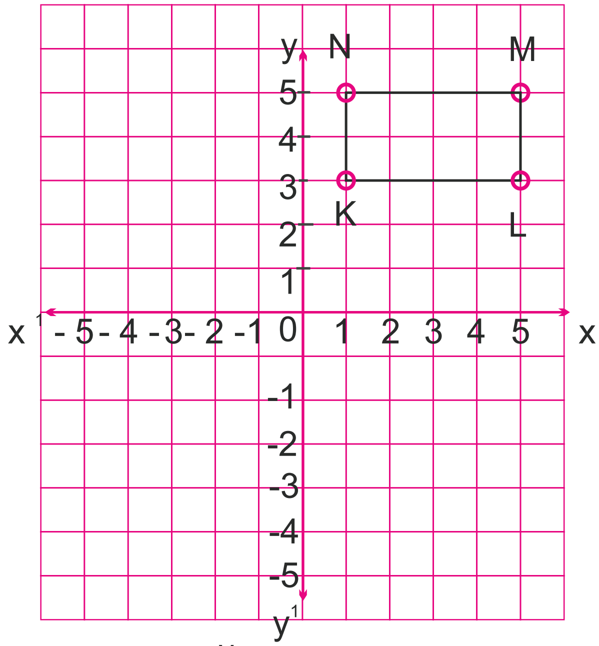
(3)

(i)



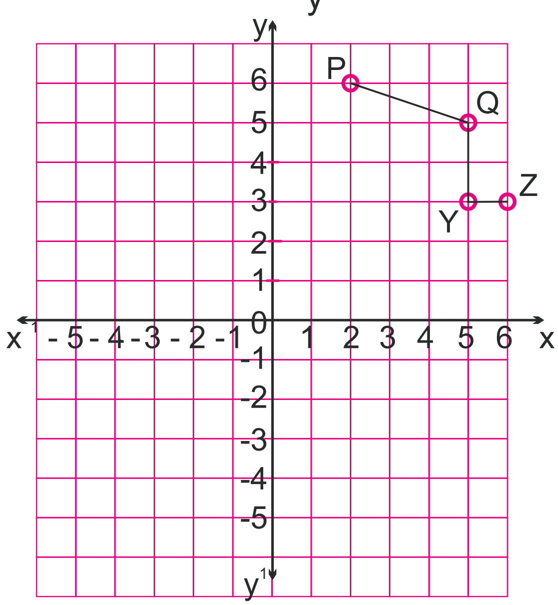
हाँ

(b)



नहीं

(c)



नहीं

(4) (i) A(1,5), B(5,5), C(6,8), D(2,8)

AB की लम्बाई 4 इकाई, DC की लम्बाई 4 इकाई

(ii) P(1,1), Q(4,1), R(1,3) ;PQ की लम्बाई 3 इकाई

(5) (i) सत्य (ii) सत्य (iii) सत्य (iv) असत्य (v) असत्य

प्रश्नावली 12.2

(1) समबाहु त्रिभुज

लम्बाई	1	2	3	4	5	6
परिमाप	3	6	9	12	15	18

वर्ग

लम्बाई	1	2	3	4	5	6
परिमाप	4	8	12	16	20	24

(2)

आयत की चौड़ाई	1	2	3	4	5	
क्षेत्रफल	2	8	18	32	50	

(3), (4), (5) दी गई सारणी अनुसार आरेख बनाएँ।

प्रश्नावली 13.1

(1) (i) 25% (ii) 75%

(2) (i) 3:2 (ii) 2:3 (iii) 3:5 (iv) 2:5

(3) 51 विद्यार्थी

(4) 20 मैच (5) 459 वृक्ष

(6) 2400 रू. (7) 15%

प्रश्नावली 13.2

(1) 16% हानि (2) 23000 रू (3) 16% हानि (4) 61560 रू (5) 15225 रू

(6) 4% हानि (7) 6.25% (8) 2 वर्ष 6 माह (9) 7476 रू

प्रश्नावली 13.3

(1) 20% (2) 19200 रू (3) 62,684.16 रू (4) 6400 (5) 1,664 रू

(6) 16,686.86 रू (7) 2837.25 (8) (i) 85,600 रू (ii) 91,592 रू

(9) 95.31रू

प्रश्नावली 13.4

(1) 450 रू (2) 216 मीटर (3) 15 पुस्तके (4) 5 घण्टे

(5) 60 लीटर (6) 400 लीटर (7) 12 दिन (8) 12 दिन

(9) 20 (10) 20 विद्यार्थी (11) 400 किग्रा

प्रश्नावली 14.1

(1) 104 वर्ग सेमी (2) 224 वर्ग सेमी

(3) 7 सेमी (4) 119 वर्ग मीटर

(5) 11,700 रूपये (6) 40.5 वर्ग सेमी

(7) 23100 वर्ग मीटर

(8) (i) आधा (ii) असमान (iii) समलम्ब (iv) समचतुर्भुज

प्रश्नावली 14.2

(1) 10450 वर्ग मीटर

(2) 64 वर्ग सेमी

(3) 19550 वर्ग मीटर

प्रश्नावली 15.1

(1) 384 वर्ग सेमी, 174 वर्ग सेमी, 38600 वर्ग सेमी

(2) 10 सेमी

(3) बेलन 231 वर्ग मी. घन 294 वर्ग मी तथा घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल अधिक है।

(4) 5280 वर्ग सेमी (5) 0.52 वर्ग मीटर (6) 145 डिब्बे

(7) 1408 रूपये (8) 322 मीटर (9) 1980 वर्ग मीटर

(10) 96 वर्ग सेमी

प्रश्नावली 15.2

(1) 450 घन

(2) 24 गुटके

(3) बेलन A का
(i) 1078सेमी^{3} (ii) 539सेमी^{3}

(4) 49500

(5) 1925 मिनट

(6) 27 किग्रा (7) (i) 4 गुना (ii) 8 गुना

(8) 20 मीटर

प्रश्नावली 16.1

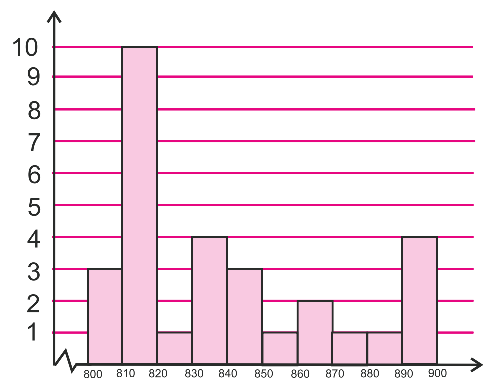
1. (ii) (iv) (v) इन सभी परिस्थितियों में आँकड़ों को वर्ग अन्तराल में विभाजित किया जा सकता है।

2.

रंग	मिलान चिन्ह	कपड़ों की सं.
W	~~IIII~~ III	8
R	~~IIII~~ ~~IIII~~	10
B	~~IIII~~ I	6
Y	~~IIII~~ II	7
X	~~IIII~~ IIII	9
	योग	40

3.

परिश्रमिक	मिलान चिन्ह	श्रमिकों की सं.
800-810	III	3
810-820	~~IIII~~ ~~IIII~~	10
820-830	I	1
830-840	IIII	4
840-850	III	3
850-860	I	1
860-870	II	2
870-880	I	1
880-890	I	1
890-900	IIII	4
	योग	30



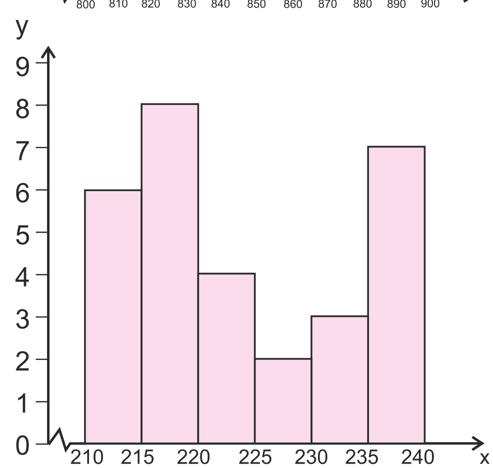
4.

मोबाइल की संख्या	मिलान चिन्ह	दिनों की सं.
210-215	~~IIII~~ I	6
215-220	~~IIII~~ III	8
220-225	IIII	4
225-230	II	2
230-235	III	3
235-240	~~IIII~~ II	7
	योग	30

(i) 215-220

(ii) 10 दिन

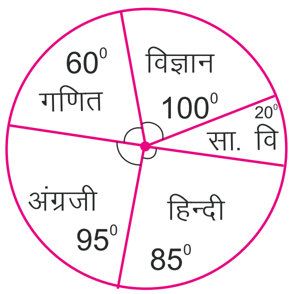
(iii) 20 दिन



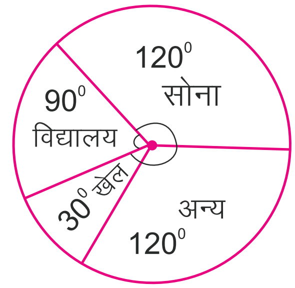
5. (i) 4–5 घण्टे (ii) 60 विद्यार्थियों ने (iii) 100 विद्यार्थी (iv) 4–5

प्रश्नावली 16.2

(1)



(2)

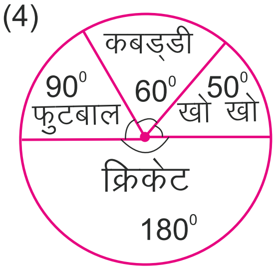


(3) **(i) गणित**

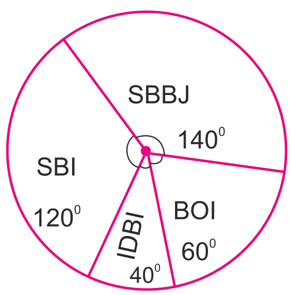
(ii) 250-180 = 70 **अंक**

(iii) हाँ

(4)



(5)



6. (i) 26.7% (ii) 29.9% (iii) 0.3% (iv) 10.4%

प्रश्नावली 16.3

(1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$ (3) $\frac{1}{13}$

(4) (i) (a) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

(iii) (a) $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ (iv) $\frac{5}{6}$

(v) $\frac{1}{2}$

(5) (i) $\frac{1}{15}$ (ii) $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$ (iii) $\frac{9}{15} = \frac{3}{5}$

ब्रह्मगुप्त

ब्रह्मगुप्त का जन्म 598 ई. में जालौर जिले के भीनमाल कस्बे में हुआ था। वे उज्जैन गुरूकुल के प्रमुख खगोल शास्त्री थे। इन्होंने 30 वर्ष की आयु में **"ब्रह्मस्फुट सिद्धान्त"** नामक खगोल शास्त्र के प्रमाणिक एवं मानक ग्रन्थ की रचना की जिसमें 24 अध्याय है।

इस ग्रन्थ का 12 वाँ अध्याय 'गणिताध्याय' है। जिसमें अंक गणित तथा छाया इत्यादि सामग्री दी गई है।

इस ग्रन्थ के 18 वें अध्याय को कुट्टकाध्याय नाम दिया गया है। इस अध्याय में बीजगणित अनिर्धार्य रैखिक एवं वर्ग समीकरणों के हल दिए हैं।

इस ग्रन्थ के अध्याय 2 में त्रिकोणमिति पर लेखन किया गया है। इनकी दूसरी प्रमुख रचना 'खण्डखाद्यकम्' नामक ग्रन्थ है। इसमें विशेषकर अन्तर्वेशन तथा समतल त्रिकोणमिति एवं गोलीय त्रिकोणमिति दोनों में Sine (ज्या) और Consine (कोज्या) के नियम उपलब्ध हैं। ये दोनों ग्रन्थ भांडारकर प्राच्य विद्या संशोधन मन्दिर पुणे महाराष्ट्र में उपलब्ध हैं। इन ग्रन्थों का अरबी और फारसी में अनुवाद हुआ है और यह ज्ञान अरब देश को हुआ वहाँ से यह ज्ञान पश्चिमी देशों को प्राप्त हुआ।

गणित के क्षेत्र में ब्रह्मगुप्त का प्रमुख योगदान निम्नलिखित है–

(1) वर्गमूल तथा घनमूल ज्ञात करने की सरल विधियाँ

(2) शून्य के गुणधर्म की व्याख्या

(3) वर्ग समीकरण के मूल ज्ञात करने की विधि

(4) त्रिभुज तथा चक्रीय चतुर्भुज के क्षेत्रफल ज्ञात करने का सूत्र दिया–

स्थूलफलं त्रिचतुर्भुजबाहु प्रतिबाहु योग दसघातः।
भुजयोगार्धचतुष्टय भुजोनघातात् पदं सूक्ष्मतम्।।

अर्थात् भुजाओं के योग के आधे को चार बार लिखकर भुजाओं को घटाएँ, इन्हें गुणा कर वर्गमूल निकालें।

$$\text{चक्रीय चतुर्भुज का क्षेत्रफल} = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

[जहाँ a, b, c, d चक्रीय चतुर्भुज की भुजाएँ और $2s = a + b + c + d$ है]

$$\text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

[जहाँ a, b, c त्रिभुज की भुजाएँ और $2s = a + b + c$ है]

(5) पूर्णांक चक्रीय चतुर्भुज की रचना करना इत्यादि कार्य आज भी गणित जगत के सिरमोर हैं।