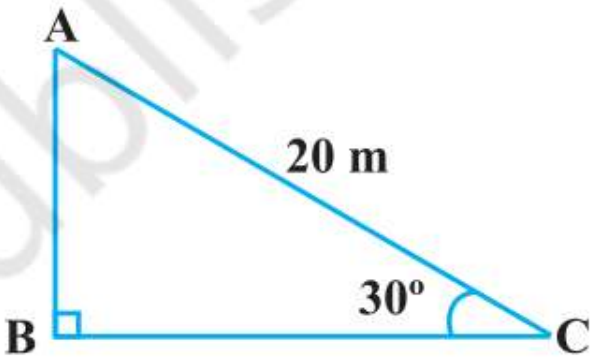
अध्याय 9: त्रिकोणमिति के कुछ अनुप्रयोग

Class 10 Math Chapter 9 Solutions (Hindi Medium)

प्रश्नावली 9.1

नोट: सूत्रों को स्पष्ट रूप से दर्शाने के लिए **L = लंब, A = आधार, और K = कर्ण** का उपयोग किया गया है (LAL/KKA)।

प्र 1. सर्कस का एक कलाकार एक 20 m लंबी डोर पर चढ़ रहा है जो अच्छी तरह से तनी हुई है और भूमि पर सीधे लगे खंभे के शिखर से बंधी हुई है। यदि भूमि स्तर के साथ डोर द्वारा बनाया गया कोण 30° का हो तो खंभे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए (देखिए आकृति 9.11)।



आकृति 9.11

माना AB खंभा है और AC तनी हुई डोर है।

दिया है: डोर की लंबाई (कर्ण, AC) = 20 m

उन्नयन कोण $\angle C = 30^\circ$

हमें खंभे की ऊँचाई AB (लंब) ज्ञात करनी है।

समकोण $\triangle ABC$ में,

$\sin 30^\circ = \frac{L}{K} = \frac{AB}{AC}$

$\frac{1}{2} = \frac{AB}{20}$

$2 \times AB = 20 \Rightarrow AB = \frac{20}{2} = 10 \text{ m}$

अतः खंभे की ऊँचाई 10 m है।

प्र 2. आँधी आने से एक पेड़ टूट जाता है और टूटा हुआ भाग इस तरह मुड़ जाता है कि पेड़ का शिखर जमीन को छूने लगता है और इसके साथ 30° का कोण बनाता है। पेड़ के पाद-बिंदु की दूरी, जहाँ पेड़ का शिखर जमीन को छूता है, 8 m है। पेड़ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

माना मूल पेड़ की ऊँचाई BD थी। बिंदु A से पेड़ टूट जाता है और उसका टूटा हुआ भाग AD अब मुड़कर AC बन गया है जो जमीन को छू रहा है।

तो, कुल ऊँचाई = $AB + AC$।

दिया है: $\angle C = 30^\circ$, और BC (आधार) = 8 m।

समकोण $\triangle ABC$ में AB (लंब) निकालने के लिए:

$\tan 30^\circ = \frac{L}{A} = \frac{AB}{BC}$

$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AB}{8} \Rightarrow AB = \frac{8}{\sqrt{3}}\ \text{m}$

अब AC (कर्ण) निकालने के लिए:

$\cos 30^\circ = \frac{A}{K} = \frac{BC}{AC}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{8}{AC} \Rightarrow \sqrt{3} \times AC = 16 \Rightarrow AC = \frac{16}{\sqrt{3}}\ \text{m}$

पेड़ की कुल ऊँचाई = $AB + AC = \frac{8}{\sqrt{3}} + \frac{16}{\sqrt{3}} = \frac{24}{\sqrt{3}}$

हर का परिमेयकरण करने पर: $\frac{24}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{24\sqrt{3}}{3} = 8\sqrt{3}\ \text{m}$

अतः पेड़ की ऊँचाई $8\sqrt{3}$ m है।

प्र 3. **एक ठेकेदार बच्चों को खेलने के लिए एक पार्क में दो फिसलनपट्टी लगाना चाहती है। 5 वर्ष से कम उम्र के बच्चों के लिए वह एक ऐसी फिसलनपट्टी लगाना चाहती है जिसका शिखर 1.5 m की ऊँचाई पर हो और भूमि के साथ 30° के कोण पर झुका हुआ हो, जबकि इससे अधिक उम्र के बच्चों के लिए वह 3 m की ऊँचाई पर एक अधिक ढाल की फिसलनपट्टी लगाना चाहती है, जो भूमि के साथ 60° का कोण बनाती हो। प्रत्येक स्थिति में फिसलनपट्टी की लंबाई क्या होनी चाहिए?**

स्थिति 1 (5 वर्ष से कम उम्र के बच्चों के लिए):

माना ऊँचाई (लंब) AB = 1.5 m, और फिसलनपट्टी (कर्ण) AC है। कोण = 30°।

$\sin 30^\circ = \frac{L}{K} = \frac{AB}{AC}$

$\frac{1}{2} = \frac{1.5}{AC} \Rightarrow AC = 1.5 \times 2 = 3 \text{ m}$

स्थिति 2 (अधिक उम्र के बच्चों के लिए):

माना ऊँचाई (लंब) PQ = 3 m, और फिसलनपट्टी (कर्ण) PR है। कोण = 60°।

$\sin 60^\circ = \frac{L}{K} = \frac{PQ}{PR}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{PR} \Rightarrow \sqrt{3} \times PR = 6$

$PR = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3} \text{ m}$

अतः पहली फिसलनपट्टी की लंबाई 3 m और दूसरी की $2\sqrt{3}$ m होनी चाहिए।

प्र 4. **भूमि के एक बिंदु से, जो मीनार के पाद-बिंदु से 30 m की दूरी पर है, मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 30° है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।**

माना मीनार की ऊँचाई AB (लंब) है और बिंदु C भूमि पर है।

दिया है: बिंदु C से मीनार की दूरी BC (आधार) = 30 m, और कोण $\angle C = 30^\circ$।

समकोण $\triangle ABC$ में,

$\tan 30^\circ = \frac{L}{A} = \frac{AB}{BC}$

$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AB}{30}$

$AB = \frac{30}{\sqrt{3}}$

परिमेयकरण करने पर: $AB = \frac{30}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{30\sqrt{3}}{3} = 10\sqrt{3} \text{ m}$

अतः मीनार की ऊँचाई $10\sqrt{3}$ m है।

प्र 5. **भूमि से 60 m की ऊँचाई पर एक पतंग उड़ रही है। पतंग में लगी डोरी को अस्थायी रूप से भूमि के एक बिंदु से बांध दिया गया है। भूमि के साथ डोरी का झुकाव 60° है। यह मानकर कि डोरी में कोई ढील नहीं है, डोरी की लंबाई ज्ञात कीजिए।**

माना पतंग की ऊँचाई AB (लंब) = 60 m है और डोरी की लंबाई AC (कर्ण) है।

दिया है: डोरी का भूमि के साथ कोण $\angle C = 60^\circ$।

समकोण $\triangle ABC$ में,

$\sin 60^\circ = \frac{L}{K} = \frac{AB}{AC}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{60}{AC}$

$\sqrt{3} \times AC = 120$

$AC = \frac{120}{\sqrt{3}}$

परिमेयकरण करने पर: $AC = \frac{120}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{120\sqrt{3}}{3} = 40\sqrt{3}\ \text{m}$

अतः डोरी की लंबाई $40\sqrt{3}\ \text{m}$ है।

प्र 6. **1.5 m लंबा एक लड़का 30 m ऊँचे एक भवन से कुछ दूरी पर खड़ा है। जब वह ऊँचे भवन की ओर जाता है तब उसकी आँख से भवन के शिखर का उन्नयन कोण 30° से 60° हो जाता है। बताइए कि वह भवन की ओर कितनी दूरी तक चलकर गया है।**

माना भवन की ऊँचाई PQ = 30 m और लड़के की ऊँचाई AB = 1.5 m है।

लड़के की आँख के स्तर पर एक क्षैतिज रेखा AR खींचते हैं।

तब भवन का आँख के स्तर से ऊपर का भाग PR = $30 - 1.5 = 28.5$ m।

माना लड़का बिंदु A से बिंदु C तक चलकर जाता है (जहाँ आँख बिंदु A से C तक जाती है)।

शुरुआती कोण $\angle PAR = 30^\circ$, और चलने के बाद कोण $\angle PCR = 60^\circ$।

समकोण $\triangle PCR$ में:

$$\tan 60^\circ = \frac{L}{A} = \frac{PR}{CR} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{28.5}{CR} \Rightarrow CR = \frac{28.5}{\sqrt{3}}$$

समकोण $\triangle PAR$ में:

$$\tan 30^\circ = \frac{L}{A} = \frac{PR}{AR} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{28.5}{AR} \Rightarrow AR = 28.5\sqrt{3}$$

लड़के द्वारा चली गई दूरी AC = $AR - CR$

$$AC = 28.5\sqrt{3} - \frac{28.5}{\sqrt{3}}$$

$$AC = \frac{28.5 \times 3 - 28.5}{\sqrt{3}} = \frac{85.5 - 28.5}{\sqrt{3}} = \frac{57}{\sqrt{3}}$$

परिमेयकरण करने पर: $\frac{57}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{57\sqrt{3}}{3} = 19\sqrt{3}$ m

अतः लड़का भवन की ओर $19\sqrt{3}$ m चलकर गया।

प्र 7. **भूमि के एक बिंदु से एक 20 m ऊँचे भवन के शिखर पर लगी एक संचार मीनार के तल और शिखर के उन्नयन कोण क्रमशः 45° और 60° हैं। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।**

माना भवन की ऊँचाई BC = 20 m है और उसके ऊपर लगी संचार मीनार की ऊँचाई AB = h है।

भूमि पर बिंदु D है। मीनार के तल (B) का कोण 45° और शिखर (A) का कोण 60° है।

समकोण $\triangle BCD$ में:

$\tan 45^\circ = \frac{L}{A} = \frac{BC}{CD} \Rightarrow 1 = \frac{20}{CD} \Rightarrow CD = 20 \text{ m}$

समकोण $\triangle ACD$ में:

लंब AC = $AB + BC = h + 20$

$\tan 60^\circ = \frac{AC}{CD} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{h+20}{20}$

$h + 20 = 20\sqrt{3}$

$h = 20\sqrt{3} - 20 = 20(\sqrt{3} - 1) \text{ m}$

अतः संचार मीनार की ऊँचाई $20(\sqrt{3} - 1)$ m है।

प्र 8. एक पेडस्टल के शिखर पर एक 1.6 m ऊँची मूर्ति लगी है। भूमि के एक बिंदु से मूर्ति के शिखर का उन्नयन कोण 60° है और उसी बिंदु से पेडस्टल के शिखर का उन्नयन कोण 45° है। पेडस्टल की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

माना पेडस्टल की ऊँचाई BC = h है और उसके ऊपर लगी मूर्ति AB = 1.6 m है।

भूमि पर बिंदु D है। मूर्ति के शिखर (A) का उन्नयन कोण 60° और पेडस्टल के शिखर (B) का कोण 45° है।

समकोण $\triangle BCD$ में:

$\tan 45^\circ = \frac{L}{A} = \frac{BC}{CD} \Rightarrow 1 = \frac{h}{CD} \Rightarrow CD = h$

समकोण $\triangle ACD$ में:

लंब AC = $AB + BC = 1.6 + h$

$\tan 60^\circ = \frac{AC}{CD} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{1.6+h}{h}$

$\sqrt{3}h = 1.6 + h \Rightarrow \sqrt{3}h - h = 1.6 \Rightarrow h(\sqrt{3} - 1) = 1.6$

$h = \frac{1.6}{\sqrt{3}-1}$

हर का परिमेयकरण करने पर:

$\frac{1.6}{\sqrt{3}-1} \times \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{1.6(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \frac{1.6(\sqrt{3}+1)}{2} = 0.8(\sqrt{3}+1)\ \text{m}$

अतः पेडस्टल की ऊँचाई $0.8(\sqrt{3}+1)\ \text{m}$ है।

प्र 9. एक मीनार के पाद-बिंदु से एक भवन के शिखर का उन्नयन कोण 30° है और भवन के पाद-बिंदु से मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 60° है। यदि मीनार 50 m ऊँची हो, तो भवन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

माना मीनार AB = 50 m है और भवन CD = h है। दोनों के बीच की दूरी BD = x है।

दिया है: मीनार के तल से भवन के शिखर का कोण $\angle CBD = 30^\circ$ और भवन के तल से मीनार के शिखर का कोण $\angle ADB = 60^\circ$।

समकोण $\triangle ABD$ में:

$$\tan 60^\circ = \frac{L}{A} = \frac{AB}{BD} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{50}{x} \Rightarrow x = \frac{50}{\sqrt{3}} \text{ m}$$

समकोण $\triangle CDB$ में:

$$\tan 30^\circ = \frac{CD}{BD} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{x} \Rightarrow h = \frac{x}{\sqrt{3}}$$

x का मान रखने पर: $h = \frac{50/\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3}$ m

अतः भवन की ऊँचाई $16\frac{2}{3}$ m है।

प्र 10. एक 80 m चौड़ी सड़क के दोनों ओर आमने-सामने समान ऊँचाई वाले दो खंभे लगे हुए हैं। इन दोनों खंभों के बीच सड़क के एक बिंदु से खंभों के शिखर के उन्नयन कोण क्रमशः 60° और 30° हैं। खंभों की ऊँचाई और खंभों से बिंदु की दूरी ज्ञात कीजिए।

माना समान ऊँचाई के दो खंभे AB और CD हैं (AB = CD = h)। सड़क की चौड़ाई BD = 80 m है।

सड़क पर एक बिंदु P है। माना BP = x, तो PD = $80 - x$।

दिया है: $\angle APB = 60^\circ$ और $\angle CPD = 30^\circ$।

समकोण $\triangle APB$ में:

$\tan 60^\circ = \frac{L}{A} = \frac{AB}{BP} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{x} \Rightarrow h = x\sqrt{3}$ --- (1)

समकोण $\triangle CPD$ में:

$\tan 30^\circ = \frac{CD}{PD} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{80-x} \Rightarrow h = \frac{80-x}{\sqrt{3}}$ --- (2)

समीकरण (1) और (2) से h का मान बराबर करने पर:

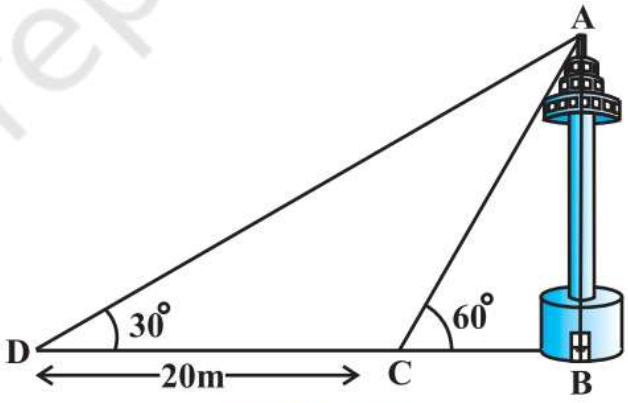
$x\sqrt{3} = \frac{80-x}{\sqrt{3}} \Rightarrow 3x = 80 - x \Rightarrow 4x = 80 \Rightarrow x = 20 \text{ m}$

अब, $h = x\sqrt{3} = 20\sqrt{3}$ m।

और दूसरे खंभे से दूरी = $80 - x = 80 - 20 = 60$ m।

अतः खंभों की ऊँचाई $20\sqrt{3}$ m है और बिंदु की खंभों से दूरियाँ 20 m तथा 60 m हैं।

प्र 11. **एक नहर के एक तट पर एक टीवी टॉवर ऊर्ध्वाधरतः खड़ा है। टॉवर के ठीक सामने दूसरे तट के एक अन्य बिंदु से टॉवर के शिखर का उन्नयन कोण 60° है। इसी तट पर इस बिंदु से 20 m दूर और इस बिंदु को मीनार के पाद से मिलाने वाली रेखा पर स्थित एक अन्य बिंदु से टॉवर के शिखर का उन्नयन कोण 30° है। (देखिए आकृति 9.12)। टॉवर की ऊँचाई और नहर की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।**



आकृति 9.12

माना टॉवर AB = h है और नहर की चौड़ाई BC = x है।

बिंदु C से कोण 60° है। C से 20 m दूर एक अन्य बिंदु D है, जहाँ से कोण 30° है (अर्थात CD = 20 m)।

समकोण $\triangle ABC$ में:

$\tan 60^\circ = \frac{L}{A} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{x} \Rightarrow h = x\sqrt{3}$ --- (1)

समकोण $\triangle ABD$ में:

आधार BD = $BC + CD = x + 20$

$\tan 30^\circ = \frac{AB}{BD} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{x+20} \Rightarrow h = \frac{x+20}{\sqrt{3}}$ --- (2)

समीकरण (1) और (2) से:

$x\sqrt{3} = \frac{x+20}{\sqrt{3}} \Rightarrow 3x = x + 20 \Rightarrow 2x = 20 \Rightarrow x = 10 \text{ m}$

अब $h = x\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$ m।

अतः टॉवर की ऊँचाई $10\sqrt{3}$ m है और नहर की चौड़ाई 10 m है।

प्र 12. **7 m ऊँचे भवन के शिखर से एक केबल टॉवर के शिखर का उन्नयन कोण 60° है और इसके पाद का अवनमन कोण 45° है। टॉवर की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।**

माना भवन AB = 7 m है और केबल टॉवर CD है। भवन के शिखर A से टॉवर पर क्षैतिज रेखा AE खींचते हैं।

अब टॉवर के दो भाग हो गए: CE (ऊपर का भाग) और ED (नीचे का भाग)। यहाँ ED = AB = 7 m।

दिया है: शिखर का उन्नयन कोण $\angle CAE = 60^\circ$ और तल का अवनमन कोण $\angle EAD = 45^\circ$।

समकोण $\triangle AED$ में:

$$\tan 45^\circ = \frac{L}{A} = \frac{ED}{AE} \Rightarrow 1 = \frac{7}{AE} \Rightarrow AE = 7 \text{ m}$$

समकोण $\triangle AEC$ में:

$$\tan 60^\circ = \frac{CE}{AE} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{CE}{7} \Rightarrow CE = 7\sqrt{3} \text{ m}$$

टॉवर की कुल ऊँचाई CD = $CE + ED = 7\sqrt{3} + 7 = 7(\sqrt{3} + 1)$ m

अतः केबल टॉवर की ऊँचाई $7(\sqrt{3} + 1)$ m है।

प्र 13. **समुद्र-तल से 75 m ऊँची लाइट हाउस के शिखर से देखने पर दो समुद्री जहाजों के अवनमन कोण 30° और 45° हैं। यदि लाइट हाउस के एक ही ओर एक जहाज दूसरे जहाज के ठीक पीछे हो, तो दोनों जहाजों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।**

माना लाइट हाउस AB = 75 m है और दो जहाज बिंदु C और D पर हैं।

लाइट हाउस के शिखर A से देखने पर जहाजों के अवनमन कोण 45° और 30° हैं। (एकांतर कोणों के कारण $\angle ACB = 45^\circ$ और $\angle ADB = 30^\circ$ होंगे)।

समकोण $\triangle ABC$ में:

$$\tan 45^\circ = \frac{L}{A} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow 1 = \frac{75}{BC} \Rightarrow BC = 75 \text{ m}$$

समकोण $\triangle ABD$ में:

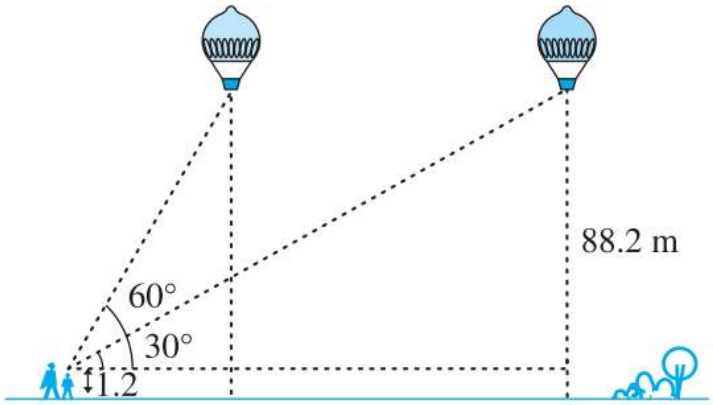
$$\tan 30^\circ = \frac{AB}{BD} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{75}{BD} \Rightarrow BD = 75\sqrt{3} \text{ m}$$

दोनों जहाजों के बीच की दूरी CD = $BD - BC$

$$CD = 75\sqrt{3} - 75 = 75(\sqrt{3} - 1) \text{ m}$$

अतः दोनों जहाजों के बीच की दूरी $75(\sqrt{3} - 1)$ m है।

प्र 14. **1.2 m लंबी एक लड़की भूमि से 88.2 m की ऊँचाई पर एक क्षैतिज रेखा में हवा में उड़ रहे गुब्बारे को देखती है। किसी भी क्षण लड़की की आँख से गुब्बारे का उन्नयन कोण 60° है। कुछ समय बाद उन्नयन कोण घटकर 30° हो जाता है (देखिए आकृति 9.13)। इस अंतराल के दौरान गुब्बारे द्वारा तय की गई दूरी ज्ञात कीजिए।**



आकृति 9.13

लड़की की ऊँचाई = 1.2 m। गुब्बारे की भूमि से ऊँचाई = 88.2 m।

लड़की की आँख के स्तर से गुब्बारे की ऊँचाई (लंब) = $88.2 - 1.2 = 87$ m।

माना गुब्बारा बिंदु A से बिंदु B तक जाता है। आँख के स्तर पर बिंदु P है। A के नीचे क्षैतिज रेखा पर Q और B के नीचे R है। (AQ = BR = 87 m)।

दिया है: $\angle APQ = 60^\circ$ और $\angle BPR = 30^\circ$।

समकोण $\triangle APQ$ में:

$$\tan 60^\circ = \frac{AQ}{PQ} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{87}{PQ} \Rightarrow PQ = \frac{87}{\sqrt{3}} = 29\sqrt{3} \text{ m}$$

समकोण $\triangle BPR$ में:

$$\tan 30^\circ = \frac{BR}{PR} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{87}{PR} \Rightarrow PR = 87\sqrt{3} \text{ m}$$

गुब्बारे द्वारा तय की गई दूरी = $PR - PQ = 87\sqrt{3} - 29\sqrt{3} = 58\sqrt{3}$ m

अतः गुब्बारे द्वारा तय की गई दूरी $58\sqrt{3}$ m है।

प्र 15. एक सीधा राजमार्ग एक मीनार के पाद तक जाता है। मीनार के शिखर पर खड़ा एक आदमी एक कार को 30° के अवनमन कोण पर देखता है जो कि मीनार के पाद की ओर एक समान चाल से जाती है। छः सेकंड बाद कार का अवनमन कोण 60° हो गया। इस बिंदु से मीनार के पाद तक पहुँचने में कार द्वारा लिया गया समय ज्ञात कीजिए।

माना मीनार AB = h है। कार बिंदु C से D तक जाती है।

शिखर A से देखने पर C का अवनमन कोण 30° ($\angle ACB = 30^\circ$) और 6 सेकंड बाद बिंदु D का कोण 60° ($\angle ADB = 60^\circ$) हो जाता है।

समकोण $\triangle ABD$ में:

$\tan 60^\circ = \frac{AB}{BD} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{BD} \Rightarrow h = BD\sqrt{3}$ --- (1)

समकोण $\triangle ABC$ में:

$\tan 30^\circ = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{BD+CD} \Rightarrow h = \frac{BD+CD}{\sqrt{3}}$ --- (2)

समीकरण (1) और (2) से:

$$BD\sqrt{3} = \frac{BD+CD}{\sqrt{3}} \Rightarrow 3BD = BD + CD \Rightarrow 2BD = CD \Rightarrow BD = \frac{CD}{2}$$

चूँकि कार एक समान चाल से चल रही है, इसलिए दूरी तय करने में लगा समय दूरी के समानुपाती होता है।

CD दूरी तय करने में लगा समय = 6 सेकंड।

इसलिए, BD दूरी (जो CD की आधी है) तय करने में लगा समय = $\frac{6}{2} = 3$ सेकंड।

अतः कार को मीनार के पाद तक पहुँचने में 3 सेकंड लगेंगे।