अध्याय 8: त्रिकोणमिति का परिचय

Class 10 Math Chapter 8 Solutions (Hindi Medium)

प्रश्नावली 8.1

नोट: सूत्रों को स्पष्ट रूप से दर्शाने के लिए **L = लंब, A = आधार, और K = कर्ण** का उपयोग किया गया है (LAL/KKA)।

प्र 1. **$\triangle ABC$ में, जिसका कोण B समकोण है, AB = 24 cm और BC = 7 cm है। निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए:**
(i) $\sin A, \cos A$
(ii) $\sin C, \cos C$

समकोण $\triangle ABC$ में, पाइथागोरस प्रमेय (Pythagoras theorem) का प्रयोग करने पर:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$AC^2 = (24)^2 + (7)^2 = 576 + 49 = 625$$

$$AC = \sqrt{625} = 25 \text{ cm}$$ (कर्ण / Hypotenuse)

(i) कोण A के लिए: लंब (Perpendicular) = BC = 7 cm, आधार (Base) = AB = 24 cm, कर्ण = AC = 25 cm

$$\sin A = \frac{L}{K} = \frac{BC}{AC} = \frac{7}{25}$$

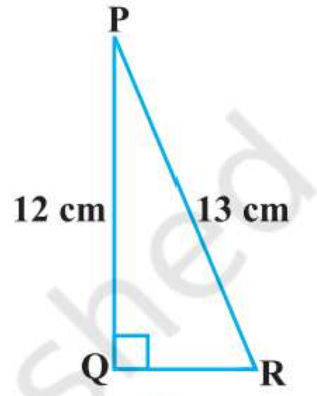
$$\cos A = \frac{A}{K} = \frac{AB}{AC} = \frac{24}{25}$$

(ii) कोण C के लिए: लंब = AB = 24 cm, आधार = BC = 7 cm, कर्ण = AC = 25 cm

$$\sin C = \frac{L}{K} = \frac{AB}{AC} = \frac{24}{25}$$

$$\cos C = \frac{A}{K} = \frac{BC}{AC} = \frac{7}{25}$$

प्र 2. **आकृति 8.13 में, $\tan P - \cot R$ का मान ज्ञात कीजिए।**



आकृति 8.13

दी गई आकृति समकोण $\triangle PQR$ है जिसमें कोण Q समकोण है।

दिया है: PQ = 12 cm और PR = 13 cm।

पाइथागोरस प्रमेय से: $PR^2 = PQ^2 + QR^2$

$(13)^2 = (12)^2 + QR^2$

$169 = 144 + QR^2 \Rightarrow QR^2 = 169 - 144 = 25$

$QR = 5 \text{ cm}$

अब, कोण P के लिए: लंब = QR = 5 cm, आधार = PQ = 12 cm

$\tan P = \frac{L}{A} = \frac{QR}{PQ} = \frac{5}{12}$

कोण R के लिए: आधार = QR = 5 cm, लंब = PQ = 12 cm

$\cot R = \frac{A}{L} = \frac{QR}{PQ} = \frac{5}{12}$

अतः, $\tan P - \cot R = \frac{5}{12} - \frac{5}{12} = 0$।

प्र 3. **यदि $\sin A = \frac{3}{4}$, तो $\cos A$ और $\tan A$ का मान परिकलित कीजिए।**

दिया है: $\sin A = \frac{L}{K} = \frac{3}{4}$

माना लंब = 3k और कर्ण = 4k (जहाँ k एक धनात्मक संख्या है)।

पाइथागोरस प्रमेय से आधार ज्ञात करते हैं:

$K^2 = L^2 + A^2$

$(4k)^2 = (3k)^2 + A^2$

$16k^2 = 9k^2 + A^2 \Rightarrow A^2 = 7k^2 \Rightarrow A = \sqrt{7}k$

अब,

$\cos A = \frac{A}{K} = \frac{\sqrt{7}k}{4k} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

$\tan A = \frac{L}{A} = \frac{3k}{\sqrt{7}k} = \frac{3}{\sqrt{7}}$

प्र 4. **यदि $15 \cot A = 8$ हो, तो $\sin A$ और $\sec A$ का मान ज्ञात कीजिए।**

दिया है: $15 \cot A = 8 \Rightarrow \cot A = \frac{8}{15}$

हम जानते हैं कि $\cot A = \frac{A}{L}$।

माना आधार = 8k और लंब = 15k।

पाइथागोरस प्रमेय से कर्ण ज्ञात करते हैं:

$K^2 = L^2 + A^2 = (15k)^2 + (8k)^2$

$K^2 = 225k^2 + 64k^2 = 289k^2 \Rightarrow K = 17k$

अब,

$\sin A = \frac{L}{K} = \frac{15k}{17k} = \frac{15}{17}$

$\sec A = \frac{K}{A} = \frac{17k}{8k} = \frac{17}{8}$

प्र 5. **यदि $\sec\theta = \frac{13}{12}$ हो, तो अन्य सभी त्रिकोणमितीय अनुपात परिकलित कीजिए।**

दिया है: $\sec\theta = \frac{K}{A} = \frac{13}{12}$

माना कर्ण = 13k और आधार = 12k।

पाइथागोरस प्रमेय से लंब ज्ञात करते हैं:

$L^2 = K^2 - A^2 = (13k)^2 - (12k)^2$

$L^2 = 169k^2 - 144k^2 = 25k^2 \Rightarrow L = 5k$

अन्य सभी त्रिकोणमितीय अनुपात:

$\sin\theta = \frac{L}{K} = \frac{5k}{13k} = \frac{5}{13}$

$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} = \frac{12}{13}$

$\tan\theta = \frac{L}{A} = \frac{5k}{12k} = \frac{5}{12}$

$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{13}{5}$

$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{12}{5}$

प्र 6. **यदि $\angle A$ और $\angle B$ न्यून कोण हों जहाँ $\cos A = \cos B$, तो दिखाइए कि $\angle A = \angle B$।**

माना $\triangle ABC$ एक समकोण त्रिभुज है जहाँ कोण C समकोण है। (यहाँ A और B न्यून कोण हैं)

चित्र के अनुसार:

$\cos A = \frac{A}{K} = \frac{AC}{AB}$

$\cos B = \frac{A}{K} = \frac{BC}{AB}$

दिया है कि $\cos A = \cos B$।

अतः, $\frac{AC}{AB} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow AC = BC$

हम जानते हैं कि किसी त्रिभुज में बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण भी बराबर होते हैं।

चूँकि $AC = BC$ है, इसलिए इनके सम्मुख कोण बराबर होंगे।

अतः $\angle B = \angle A$ या $\angle A = \angle B$। (इति सिद्धम)

प्र 7. **यदि $\cot\theta = \frac{7}{8}$, तो (i) $\frac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$ (ii) $\cot^2\theta$ का मान निकालिए।**

दिया है: $\cot\theta = \frac{7}{8} = \frac{A}{L}$। माना आधार = 7k, लंब = 8k।

कर्ण $= \sqrt{(8k)^2 + (7k)^2} = \sqrt{64k^2 + 49k^2} = \sqrt{113}k$

$\sin\theta = \frac{8}{\sqrt{113}}$ और $\cos\theta = \frac{7}{\sqrt{113}}$

(i) $\frac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$

सूत्र $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ का प्रयोग करने पर:

$= \frac{1-\sin^2\theta}{1-\cos^2\theta}$

$= \frac{1-(\frac{8}{\sqrt{113}})^2}{1-(\frac{7}{\sqrt{113}})^2} = \frac{1-\frac{64}{113}}{1-\frac{49}{113}}$

$= \frac{\frac{113-64}{113}}{\frac{113-49}{113}} = \frac{49}{64}$

(ii) $\cot^2\theta$

$\cot^2\theta = (\cot\theta)^2 = (\frac{7}{8})^2 = \frac{49}{64}$

प्र 8. **यदि $3\cot A = 4$, तो जाँच कीजिए कि $\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} = \cos^2 A - \sin^2 A$ है या नहीं।**

दिया है: $3\cot A = 4 \Rightarrow \cot A = \frac{4}{3}$

$\tan A = \frac{1}{\cot A} = \frac{3}{4}$। (यहाँ लंब = 3k, आधार = 4k)

कर्ण $= \sqrt{(3k)^2 + (4k)^2} = \sqrt{9k^2 + 16k^2} = \sqrt{25k^2} = 5k$

$\sin A = \frac{3}{5}$ और $\cos A = \frac{4}{5}$

L.H.S (बायाँ पक्ष):

$\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} = \frac{1-(\frac{3}{4})^2}{1+(\frac{3}{4})^2} = \frac{1-\frac{9}{16}}{1+\frac{9}{16}} = \frac{\frac{16-9}{16}}{\frac{16+9}{16}} = \frac{7}{25}$

R.H.S (दायाँ पक्ष):

$\cos^2 A - \sin^2 A = (\frac{4}{5})^2 - (\frac{3}{5})^2 = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$

चूँकि L.H.S = R.H.S है, इसलिए यह **सत्य है (हाँ)**।

प्र 9. **त्रिभुज ABC में, जिसका कोण B समकोण है, यदि $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$, तो निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए:**
(i) $\sin A \cos C + \cos A \sin C$
(ii) $\cos A \cos C - \sin A \sin C$

दिया है: $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\text{लंब (BC)}}{\text{आधार (AB)}}$। माना BC = 1k, AB = $\sqrt{3}k$।

पाइथागोरस प्रमेय से कर्ण AC:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{(\sqrt{3}k)^2 + (1k)^2} = \sqrt{3k^2 + 1k^2} = \sqrt{4k^2} = 2k$$

अब मान निकालते हैं:

$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}, \quad \cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin C = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos C = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$

(i) $\sin A \cos C + \cos A \sin C$

$= (\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}) + (\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1$

(ii) $\cos A \cos C - \sin A \sin C$

$= (\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2}) - (\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$

प्र 10. **$\triangle PQR$ में, जिसका कोण Q समकोण है, $PR + QR = 25$ cm और $PQ = 5$ cm है। $\sin P$, $\cos P$ और $\tan P$ के मान ज्ञात कीजिए।**

माना $QR = x$ cm। तब दिया गया है $PR + QR = 25 \Rightarrow PR = 25 - x$।

समकोण $\triangle PQR$ में पाइथागोरस प्रमेय से: $PR^2 = PQ^2 + QR^2$

$(25 - x)^2 = (5)^2 + x^2$

$625 - 50x + x^2 = 25 + x^2$

$625 - 50x = 25 \Rightarrow 50x = 600 \Rightarrow x = 12$

अतः, $QR = 12$ cm (लंब) और $PR = 25 - 12 = 13$ cm (कर्ण)। आधार $PQ = 5$ cm है।

अब मान ज्ञात करते हैं:

$\sin P = \frac{QR}{PR} = \frac{12}{13}$

$\cos P = \frac{PQ}{PR} = \frac{5}{13}$

$\tan P = \frac{QR}{PQ} = \frac{12}{5}$

प्र 11. **बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। कारण सहित अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।**

(i) $\tan A$ का मान सदैव 1 से कम होता है।

(ii) कोण A के किसी मान के लिए $\sec A = \frac{12}{5}$।

(iii) $\cos A$, कोण A के cosecant के लिए प्रयुक्त एक संक्षिप्त रूप है।

(iv) $\cot A$, cot और A का गुणनफल होता है।

(v) किसी भी कोण θ के लिए $\sin\theta = \frac{4}{3}$।

(i) असत्य। $\tan A = \frac{L}{A}$। यदि लंब > आधार हो, तो $\tan A > 1$ हो सकता है (जैसे $\tan 60^\circ = \sqrt{3} \approx 1.732$)।

(ii) सत्य। $\sec A = \frac{K}{A}$। कर्ण हमेशा आधार से बड़ा होता है, और यहाँ $\frac{12}{5} > 1$ है, जो संभव है।

(iii) असत्य। $\cos A$, कोण A के 'cosine' का संक्षिप्त रूप है, 'cosecant' का संक्षिप्त रूप $\csc A$ होता है।

(iv) असत्य। $\cot A$ एक त्रिकोणमितीय अनुपात का प्रतीक है। बिना कोण A के cot का कोई अर्थ नहीं होता; यह गुणनफल नहीं है।

(v) असत्य। $\sin\theta = \frac{L}{K}$। चूँकि कर्ण हमेशा लंब से बड़ा होता है, इसलिए $\sin\theta$ का मान कभी भी 1 से अधिक नहीं हो सकता (यहाँ $\frac{4}{3} > 1$ है)।

प्रश्नावली 8.2

प्र 1. **निम्नलिखित के मान निकालिए:**

(i) $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ$

(ii) $2\tan^2 45^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin^2 60^\circ$

(iii) $\frac{\cos 45^\circ}{\sec 30^\circ + \csc 30^\circ}$

(iv) $\frac{\sin 30^\circ + \tan 45^\circ - \csc 60^\circ}{\sec 30^\circ + \cos 60^\circ + \cot 45^\circ}$

(v) $\frac{5\cos^2 60^\circ + 4\sec^2 30^\circ - \tan^2 45^\circ}{\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ}$

(i) $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

(ii) $2\tan^2 45^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin^2 60^\circ$

$$= 2(1)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$= 2 + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 2$$

(iii) $\frac{\cos 45^\circ}{\sec 30^\circ + \csc 30^\circ}$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{2}{\sqrt{3}} + 2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{2+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}(2+2\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}+2\sqrt{6}}$$

हर का परिमेयकरण करने पर: $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{6}+2\sqrt{2}} \times \frac{2\sqrt{6}-2\sqrt{2}}{2\sqrt{6}-2\sqrt{2}}$

$$= \frac{\sqrt{3}(2\sqrt{6}-2\sqrt{2})}{(2\sqrt{6})^2-(2\sqrt{2})^2} = \frac{2\sqrt{18}-2\sqrt{6}}{24-8} = \frac{2(3\sqrt{2}-\sqrt{6})}{16} = \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8}$$

(iv) $\frac{\sin 30^\circ + \tan 45^\circ - \csc 60^\circ}{\sec 30^\circ + \cos 60^\circ + \cot 45^\circ}$

$$= \frac{\frac{1}{2}+1-\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}+1} = \frac{\frac{3}{2}-\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{3}{2}+\frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{3\sqrt{3}-4}{2\sqrt{3}}}{\frac{3\sqrt{3}+4}{2\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}-4}{3\sqrt{3}+4}$$

हर का परिमेयकरण करने पर: $\frac{3\sqrt{3}-4}{3\sqrt{3}+4} \times \frac{3\sqrt{3}-4}{3\sqrt{3}-4}$

$$= \frac{(3\sqrt{3}-4)^2}{(3\sqrt{3})^2-(4)^2} = \frac{27+16-24\sqrt{3}}{27-16} = \frac{43-24\sqrt{3}}{11}$$

(v) $\frac{5\cos^2 60^\circ + 4\sec^2 30^\circ - \tan^2 45^\circ}{\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ}$

हर $\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = 1$ (चूँकि $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$)

अंश $= 5\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - (1)^2$

$$= 5\left(\frac{1}{4}\right) + 4\left(\frac{4}{3}\right) - 1 = \frac{5}{4} + \frac{16}{3} - 1$$

$= \frac{15+64-12}{12} = \frac{79-12}{12} = \frac{67}{12}$

प्र 2. **सही विकल्प चुनिए और अपने विकल्प का औचित्य दीजिए:**

(i) $\frac{2\tan 30^\circ}{1+\tan^2 30^\circ} =$ **?**

(ii) $\frac{1-\tan^2 45^\circ}{1+\tan^2 45^\circ} =$ **?**

(iii) $\sin 2A = 2\sin A$ **तब सत्य होता है, जबकि A बराबर है:**

(iv) $\frac{2\tan 30^\circ}{1-\tan^2 30^\circ} =$ **?**

(i) $\frac{2\tan 30^\circ}{1+\tan^2 30^\circ}$

$= \frac{2(1/\sqrt{3})}{1+(1/\sqrt{3})^2} = \frac{2/\sqrt{3}}{1+1/3} = \frac{2/\sqrt{3}}{4/3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

यह मान $\sin 60^\circ$ का है। अतः विकल्प **(A)** $\sin 60^\circ$ सही है।

(ii) $\frac{1-\tan^2 45^\circ}{1+\tan^2 45^\circ}$

$= \frac{1-(1)^2}{1+(1)^2} = \frac{1-1}{1+1} = \frac{0}{2} = 0$

अतः विकल्प **(D) 0** सही है।

(iii) $\sin 2A = 2\sin A$

यदि A = 0° रखें:

LHS = $\sin(2 \times 0^\circ) = \sin 0^\circ = 0$

RHS = $2\sin 0^\circ = 2(0) = 0$

अतः विकल्प **(A) 0°** सही है।

(iv) $\frac{2\tan 30^\circ}{1-\tan^2 30^\circ}$

$= \frac{2(1/\sqrt{3})}{1-(1/\sqrt{3})^2} = \frac{2/\sqrt{3}}{1-1/3} = \frac{2/\sqrt{3}}{2/3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

यह मान $\tan 60^\circ$ का है। अतः विकल्प **(C)** $\tan 60^\circ$ सही है।

प्र 3. **यदि $\tan(A+B)=\sqrt{3}$ और $\tan(A-B)=\frac{1}{\sqrt{3}}$; $0^\circ < A+B \leq 90^\circ, A > B$ तो A और B का मान ज्ञात कीजिए।**

दिया है: $\tan(A+B)=\sqrt{3}$

हम जानते हैं कि $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ होता है।

इसलिए, $A+B=60^\circ$ --- (समीकरण 1)

तथा $\tan(A-B)=\frac{1}{\sqrt{3}}$

हम जानते हैं कि $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ होता है।

इसलिए, $A-B=30^\circ$ --- (समीकरण 2)

समीकरण (1) और (2) को जोड़ने पर:

$(A+B)+(A-B)=60^\circ+30^\circ$

$2A=90^\circ \Rightarrow A=45^\circ$

A का मान समीकरण (1) में रखने पर:

$45^\circ+B=60^\circ \Rightarrow B=60^\circ-45^\circ=15^\circ$

अतः, A = 45° और B = 15° है।

प्र 4. **बताइए कि निम्नलिखित में कौन-कौन सत्य हैं या असत्य हैं। कारण सहित अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।**
(i) $\sin(A+B)=\sin A+\sin B$.
(ii) θ में वृद्धि होने के साथ $\sin\theta$ के मान में भी वृद्धि होती है।
(iii) θ में वृद्धि होने के साथ $\cos\theta$ के मान में भी वृद्धि होती है।
(iv) θ के सभी मानों पर $\sin\theta=\cos\theta$।
(v) $A=0^\circ$ पर $\cot A$ परिभाषित नहीं है।

(i) असत्य। यदि A = 30° और B = 60° लें, तो: LHS = $\sin(30+60)=\sin 90^\circ=1$। RHS = $\sin 30^\circ+\sin 60^\circ=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$। LHS $\neq$ RHS.

(ii) सत्य। $\theta=0^\circ$ से 90° तक जाने पर $\sin\theta$ का मान 0 से बढ़कर 1 हो जाता है।

(iii) असत्य। $\theta=0^\circ$ से 90° तक जाने पर $\cos\theta$ का मान 1 से घटकर 0 हो जाता है।

(iv) असत्य। यह केवल $\theta=45^\circ$ पर सत्य है, जहाँ $\sin 45^\circ=\cos 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$। सभी मानों के लिए नहीं।

(v) सत्य। $\cot 0^\circ=\frac{\cos 0^\circ}{\sin 0^\circ}=\frac{1}{0}$, जो अपरिभाषित (Not defined) है।

प्रश्नावली 8.3

प्र 1. त्रिकोणमितीय अनुपातों $\sin A$, $\sec A$ और $\tan A$ को $\cot A$ के पदों में व्यक्त कीजिए।

(i) $\tan A$ **को** $\cot A$ **के पदों में:**

$\tan A = \frac{1}{\cot A}$

(ii) $\sec A$ **को** $\cot A$ **के पदों में:**

हम जानते हैं: $\sec^2 A = 1 + \tan^2 A$

$\sec^2 A = 1 + \frac{1}{\cot^2 A} = \frac{\cot^2 A + 1}{\cot^2 A}$

$\sec A = \pm\sqrt{\frac{\cot^2 A + 1}{\cot^2 A}} = \frac{\sqrt{\cot^2 A + 1}}{\cot A}$

(iii) $\sin A$ **को** $\cot A$ **के पदों में:**

हम जानते हैं: $\csc^2 A = 1 + \cot^2 A$

$\csc A = \pm\sqrt{1 + \cot^2 A}$

$\sin A = \frac{1}{\csc A} = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 A}}$

प्र 2. $\angle A$ के अन्य सभी त्रिकोणमितीय अनुपातों को $\sec A$ के पदों में लिखिए।

(i) $\cos A = \frac{1}{\sec A}$

(ii) $\sin A$**:** $\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \Rightarrow \sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \frac{1}{\sec^2 A} = \frac{\sec^2 A - 1}{\sec^2 A}$

$\sin A = \frac{\sqrt{\sec^2 A - 1}}{\sec A}$

(iii) $\tan A$**:** $\sec^2 A - \tan^2 A = 1 \Rightarrow \tan^2 A = \sec^2 A - 1$

$\tan A = \sqrt{\sec^2 A - 1}$

(iv) $\csc A$**:** $= \frac{1}{\sin A} = \frac{\sec A}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}$

(v) $\cot A$**:** $= \frac{1}{\tan A} = \frac{1}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}$

प्र 3. **सही विकल्प चुनिए और अपने विकल्प की पुष्टि कीजिए:**

(i) $9\sec^2 A - 9\tan^2 A =$ **?**

(ii) $(1+\tan\theta+\sec\theta)(1+\cot\theta-\csc\theta) =$ **?**

(iii) $(\sec A+\tan A)(1-\sin A) =$ **?**

(iv) $\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A} =$ **?**

(i) $9\sec^2 A - 9\tan^2 A$

$= 9(\sec^2 A - \tan^2 A) = 9(1) = 9$। अतः विकल्प **(B) 9** सही है।

(ii) $(1+\tan\theta+\sec\theta)(1+\cot\theta-\csc\theta)$

$= \left(1+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{1}{\cos\theta}\right)\left(1+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-\frac{1}{\sin\theta}\right)$

$= \left(\frac{\cos\theta+\sin\theta+1}{\cos\theta}\right)\left(\frac{\sin\theta+\cos\theta-1}{\sin\theta}\right)$

$= \frac{(\sin\theta+\cos\theta)^2-(1)^2}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta-1}{\sin\theta\cos\theta}$

$= \frac{1+2\sin\theta\cos\theta-1}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta} = 2$। अतः विकल्प **(C) 2** सही है।

(iii) $(\sec A+\tan A)(1-\sin A)$

$= \left(\frac{1}{\cos A}+\frac{\sin A}{\cos A}\right)(1-\sin A) = \left(\frac{1+\sin A}{\cos A}\right)(1-\sin A)$

$= \frac{1-\sin^2 A}{\cos A} = \frac{\cos^2 A}{\cos A} = \cos A$। अतः विकल्प **(D)** $\cos A$ सही है।

(iv) $\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}$

$= \frac{\sec^2 A}{\csc^2 A} = \frac{1/\cos^2 A}{1/\sin^2 A} = \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} = \tan^2 A$। अतः विकल्प **(D)** $\tan^2 A$ सही है।

प्र 4. **निम्नलिखित सर्वसमिकाएँ सिद्ध कीजिए, जहाँ वे कोण, जिनके लिए व्यंजक परिभाषित है, न्यून कोण हैं:**

(i) $(\csc\theta - \cot\theta)^2 = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

(ii) $\frac{\cos A}{1+\sin A} + \frac{1+\sin A}{\cos A} = 2\sec A$

(iii) $\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta} + \frac{\cot\theta}{1-\tan\theta} = 1 + \sec\theta\csc\theta$

(iv) $\frac{1+\sec A}{\sec A} = \frac{\sin^2 A}{1-\cos A}$

(v) $\frac{\cos A-\sin A+1}{\cos A+\sin A-1} = \csc A + \cot A$

(vi) $\sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}} = \sec A + \tan A$

(vii) $\frac{\sin\theta-2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta-\cos\theta} = \tan\theta$

(viii) $(\sin A + \csc A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$

(ix) $(\csc A - \sin A)(\sec A - \cos A) = \frac{1}{\tan A+\cot A}$

(x) $\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A} = \left(\frac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2 = \tan^2 A$

(i) LHS: $(\csc\theta - \cot\theta)^2 = \left(\frac{1}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 = \left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2$

$= \frac{(1-\cos\theta)^2}{\sin^2\theta} = \frac{(1-\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta} = \frac{(1-\cos\theta)(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$ = RHS.

(ii) LHS: $\frac{\cos A}{1+\sin A} + \frac{1+\sin A}{\cos A} = \frac{\cos^2 A+(1+\sin A)^2}{\cos A(1+\sin A)}$

$= \frac{\cos^2 A+1+\sin^2 A+2\sin A}{\cos A(1+\sin A)} = \frac{(\sin^2 A+\cos^2 A)+1+2\sin A}{\cos A(1+\sin A)}$

$= \frac{1+1+2\sin A}{\cos A(1+\sin A)} = \frac{2+2\sin A}{\cos A(1+\sin A)} = \frac{2(1+\sin A)}{\cos A(1+\sin A)} = \frac{2}{\cos A} = 2\sec A$ = RHS.

(iii) LHS: $\frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}} + \frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{1-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta}} + \frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta}}$

$= \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)} - \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta(\sin\theta-\cos\theta)}$

$= \frac{\sin^3\theta-\cos^3\theta}{\sin\theta\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)} = \frac{(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta)}{\sin\theta\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)}$

$= \frac{1+\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{1}{\sin\theta\cos\theta} + 1 = \sec\theta\csc\theta + 1$ = RHS.

(iv) LHS: $\frac{1+\frac{1}{\cos A}}{\frac{1}{\cos A}} = \frac{\frac{\cos A+1}{\cos A}}{\frac{1}{\cos A}} = \cos A + 1$

RHS: $\frac{\sin^2 A}{1-\cos A} = \frac{1-\cos^2 A}{1-\cos A} = \frac{(1-\cos A)(1+\cos A)}{1-\cos A} = 1 + \cos A$। अतः LHS = RHS.

(v) LHS: $\frac{\cos A-\sin A+1}{\cos A+\sin A-1}$ । अंश और हर को $\sin A$ से भाग देने पर:

$= \frac{\cot A-1+\csc A}{\cot A+1-\csc A} = \frac{(\cot A+\csc A)-1}{\cot A-\csc A+1}$

$= \frac{(\cot A+\csc A)-(\csc^2 A-\cot^2 A)}{\cot A-\csc A+1} = \frac{(\csc A+\cot A)[1-(\csc A-\cot A)]}{\cot A-\csc A+1}$

$= \frac{(\csc A+\cot A)(\cot A-\csc A+1)}{\cot A-\csc A+1} = \csc A + \cot A$ = RHS.

(vi) LHS: $\sqrt{\frac{(1+\sin A)(1+\sin A)}{(1-\sin A)(1+\sin A)}} = \sqrt{\frac{(1+\sin A)^2}{1-\sin^2 A}} = \sqrt{\frac{(1+\sin A)^2}{\cos^2 A}}$

$= \frac{1+\sin A}{\cos A} = \frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A} = \sec A + \tan A$ = RHS.

(vii) LHS: $\frac{\sin\theta(1-2\sin^2\theta)}{\cos\theta(2\cos^2\theta-1)} = \frac{\sin\theta[1-2(1-\cos^2\theta)]}{\cos\theta(2\cos^2\theta-1)} = \tan\theta\frac{[1-2+2\cos^2\theta]}{(2\cos^2\theta-1)}$

$= \tan\theta\frac{(2\cos^2\theta-1)}{(2\cos^2\theta-1)} = \tan\theta$ = RHS.

(viii) LHS: $(\sin^2 A + \csc^2 A + 2\sin A\csc A) + (\cos^2 A + \sec^2 A + 2\cos A\sec A)$

$= (\sin^2 A + \cos^2 A) + \csc^2 A + \sec^2 A + 2(1) + 2(1)$

$= 1 + (1 + \cot^2 A) + (1 + \tan^2 A) + 4 = 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$ = RHS.

(ix) LHS:

$\left(\frac{1}{\sin A} - \sin A\right)\left(\frac{1}{\cos A} - \cos A\right) = \left(\frac{1-\sin^2 A}{\sin A}\right)\left(\frac{1-\cos^2 A}{\cos A}\right) = \frac{\cos^2 A}{\sin A} \times \frac{\sin^2 A}{\cos A} = \sin A\cos A$

RHS: $\frac{1}{\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\cos A}{\sin A}} = \frac{1}{\frac{\sin^2 A+\cos^2 A}{\sin A\cos A}} = \frac{1}{\frac{1}{\sin A\cos A}} = \sin A\cos A$। अतः LHS = RHS.

(x) $\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A} = \frac{\sec^2 A}{\csc^2 A} = \frac{1/\cos^2 A}{1/\sin^2 A} = \tan^2 A$। (पहला भाग)

$\left(\frac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2 = \left(\frac{1-\tan A}{1-1/\tan A}\right)^2 = \left(\frac{1-\tan A}{\frac{\tan A-1}{\tan A}}\right)^2 = (-\tan A)^2 = \tan^2 A$। अतः सिद्ध हुआ।