

अध्याय 2: बहुपद (Polynomials)

कक्षा 10 गणित - NCERT हल एवं महत्वपूर्ण प्रश्नोत्तर

✦ महत्वपूर्ण अवधारणाएँ (Key Concepts)

- बहुपद की घात (Degree of a Polynomial):** चर (variable) की अधिकतम घात को बहुपद की घात कहते हैं।
- रैखिक बहुपद (Linear Polynomial):** 1 घात वाला बहुपद, जैसे: $ax + b$ । इसका केवल 1 शून्यक होता है।
- द्विघात बहुपद (Quadratic Polynomial):** 2 घात वाला बहुपद, जैसे: $ax^2 + bx + c$ । इसके अधिकतम 2 शून्यक हो सकते हैं।
- त्रिघात बहुपद (Cubic Polynomial):** 3 घात वाला बहुपद, जैसे: $ax^3 + bx^2 + cx + d$ ।

📄 शून्यकों और गुणांकों के बीच संबंध (Relationship between Zeroes and Coefficients)

यदि α और β द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ के शून्यक हैं, तो:

- शून्यकों का योग ($\alpha + \beta$):** $= -\frac{b}{a} = -\frac{\text{(x का गुणांक)}}{\text{(x}^2 \text{ का गुणांक)}}$
- शून्यकों का गुणनफल ($\alpha\beta$):** $= \frac{c}{a} = \frac{\text{(अचर पद)}}{\text{(x}^2 \text{ का गुणांक)}}$

द्विघात बहुपद बनाने का सूत्र: $k[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta]$

प्रश्नावली 2.1 (Exercise 2.1)

अवधारणा: किसी बहुपद $p(x)$ के शून्यकों की संख्या, उस बहुपद के ग्राफ द्वारा x -अक्ष को प्रतिच्छेद (intersect) करने वाले बिंदुओं की संख्या के बराबर होती है।

प्रश्न 1: किसी बहुपद $p(x)$ के लिए, $y = p(x)$ का ग्राफ दिया गया है। प्रत्येक स्थिति में, $p(x)$ के शून्यकों की संख्या ज्ञात कीजिए।

- (i) ग्राफ x -अक्ष को किसी भी बिंदु पर प्रतिच्छेद नहीं करता है। (रेखा x -अक्ष के समांतर है)।
उत्तर: शून्यकों की संख्या 0 है।
- (ii) ग्राफ x -अक्ष को केवल 1 बिंदु पर प्रतिच्छेद करता है।
उत्तर: शून्यकों की संख्या 1 है।
- (iii) ग्राफ x -अक्ष को 3 बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करता है।
उत्तर: शून्यकों की संख्या 3 है।
- (iv) ग्राफ x -अक्ष को 2 बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करता है (परवलय आकार)।
उत्तर: शून्यकों की संख्या 2 है।
- (v) ग्राफ x -अक्ष को 4 बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करता है।
उत्तर: शून्यकों की संख्या 4 है।
- (vi) ग्राफ x -अक्ष को 1 बिंदु पर प्रतिच्छेद करता है और 2 बिंदुओं पर स्पर्श करता है (कुल 3 बिंदु)।
उत्तर: शून्यकों की संख्या 3 है।

महत्वपूर्ण उदाहरण (Important Examples)

उदाहरण 2: द्विघात बहुपद $x^2 + 7x + 10$ के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों तथा गुणांकों के बीच के संबंध की सत्यता की जाँच कीजिए।

हल:

$$\text{बहुपद: } p(x) = x^2 + 7x + 10$$

मध्य पद को विभक्त करने पर (Splitting the middle term):

$$= x^2 + 5x + 2x + 10$$

$$= x(x + 5) + 2(x + 5)$$

$$= (x + 2)(x + 5)$$

शून्यक ज्ञात करने के लिए, $p(x) = 0$ रखने पर:

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$$

अतः, शून्यक $\alpha = -2$ और $\beta = -5$ हैं।

जाँच (Verification):

समीकरण $ax^2 + bx + c$ से तुलना करने पर: $a = 1, b = 7, c = 10$

1. शून्यकों का योग $= \alpha + \beta = -2 + (-5) = -7$

सूत्र से $= -\frac{b}{a} = -\frac{7}{1} = -7$ (सत्य है)

2. शून्यकों का गुणनफल $= \alpha\beta = (-2) \times (-5) = 10$

सूत्र से $= \frac{c}{a} = \frac{10}{1} = 10$ (सत्य है)

उदाहरण 3: बहुपद $x^2 - 3$ के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों तथा गुणांकों के बीच के संबंध की सत्यता की जाँच कीजिए।

हल:

बहुपद: $p(x) = x^2 - 3$

हम जानते हैं कि $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, अतः इसे $x^2 - (\sqrt{3})^2$ लिख सकते हैं।

$$= (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$$

शून्यक के लिए $p(x) = 0$:

अतः, शून्यक $\alpha = \sqrt{3}$ और $\beta = -\sqrt{3}$ हैं।

जाँच (Verification):

यहाँ $a = 1, b = 0, c = -3$ है।

शून्यकों का योग $= \sqrt{3} + (-\sqrt{3}) = 0$. और $-\frac{b}{a} = -\frac{0}{1} = 0$

शून्यकों का गुणनफल $= \sqrt{3} \times (-\sqrt{3}) = -3$. और $\frac{c}{a} = -\frac{3}{1} = -3$ (सत्य है)

उदाहरण 4: एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यकों का योग तथा गुणनफल क्रमशः -3 और 2 हैं।

हल:

दिया है: शून्यकों का योग $(\alpha + \beta) = -3$

शून्यकों का गुणनफल $(\alpha\beta) = 2$

द्विघात बहुपद का सूत्र: $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$

$$= x^2 - (-3)x + 2$$

उत्तर: $x^2 + 3x + 2$

प्रश्नावली 2.2 (Exercise 2.2)

प्रश्न 1: निम्न द्विघात बहुपदों के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों तथा गुणांकों के बीच के संबंध की सत्यता की जाँच कीजिए:

(i) $x^2 - 2x - 8$

हल: $x^2 - 4x + 2x - 8 = x(x - 4) + 2(x - 4) = (x - 4)(x + 2)$

शून्यक: $x = 4, x = -2$

जाँच: योग = $4 + (-2) = 2$; सूत्र: $-\frac{-2}{1} = 2$. गुणनफल = $4 \times (-2) = -8$; सूत्र: $\frac{-8}{1} = -8$.

(ii) $4s^2 - 4s + 1$

हल: $4s^2 - 2s - 2s + 1 = 2s(2s - 1) - 1(2s - 1) = (2s - 1)(2s - 1)$

शून्यक: $s = \frac{1}{2}, s = \frac{1}{2}$

जाँच: योग = $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$; सूत्र: $-\frac{-4}{4} = 1$. गुणनफल = $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$; सूत्र: $\frac{1}{4}$.

(iii) $6x^2 - 3 - 7x$

हल: इसे सही क्रम में लिखने पर $6x^2 - 7x - 3$

= $6x^2 - 9x + 2x - 3 = 3x(2x - 3) + 1(2x - 3) = (2x - 3)(3x + 1)$

शून्यक: $x = \frac{3}{2}, x = -\frac{1}{3}$

जाँच: योग = $\frac{3}{2} + (-\frac{1}{3}) = \frac{7}{6}$; सूत्र: $-\frac{-7}{6} = \frac{7}{6}$. गुणनफल = $\frac{3}{2} \times (-\frac{1}{3}) = -\frac{1}{2}$; सूत्र: $\frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$.

(iv) $4u^2 + 8u$

हल: $4u(u + 2) = 0$

शून्यक: $u = 0, u = -2$

जाँच: योग = $0 + (-2) = -2$; सूत्र: $-\frac{8}{4} = -2$. गुणनफल = $0 \times (-2) = 0$; सूत्र: $\frac{0}{4} = 0$.

(v) $t^2 - 15$

हल: $(t - \sqrt{15})(t + \sqrt{15}) = 0$

शून्यक: $t = \sqrt{15}, t = -\sqrt{15}$

जाँच: योग = $\sqrt{15} - \sqrt{15} = 0$; सूत्र: $-\frac{0}{1} = 0$. गुणनफल = $\sqrt{15} \times (-\sqrt{15}) = -15$; सूत्र: $\frac{-15}{1} = -15$.

(vi) $3x^2 - x - 4$

हल: $3x^2 - 4x + 3x - 4 = x(3x - 4) + 1(3x - 4) = (3x - 4)(x + 1)$

शून्यक: $x = \frac{4}{3}, x = -1$

जाँच: योग = $\frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$; सूत्र: $-\frac{-1}{3} = \frac{1}{3}$. गुणनफल = $\frac{4}{3} \times (-1) = -\frac{4}{3}$; सूत्र: $\frac{-4}{3}$.

प्रश्न 2: एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यकों के योग तथा गुणनफल क्रमशः दी गई संख्याएँ हैं:

सूत्र (Formula): $k[x^2 - (\text{योग})x + (\text{गुणनफल})]$

- (i) $\frac{1}{4}, -1$
बहुपद: $x^2 - (\frac{1}{4})x + (-1)$
4 से गुणा करने पर: $4x^2 - x - 4$
- (ii) $\sqrt{2}, \frac{1}{3}$
बहुपद: $x^2 - (\sqrt{2})x + \frac{1}{3}$
3 से गुणा करने पर: $3x^2 - 3\sqrt{2}x + 1$
- (iii) $0, \sqrt{5}$
बहुपद: $x^2 - (0)x + \sqrt{5}$
उत्तर: $x^2 + \sqrt{5}$
- (iv) $1, 1$
बहुपद: $x^2 - (1)x + 1$
उत्तर: $x^2 - x + 1$
- (v) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$
बहुपद: $x^2 - (-\frac{1}{4})x + \frac{1}{4}$
4 से गुणा करने पर: $4x^2 + x + 1$
- (vi) $4, 1$
बहुपद: $x^2 - (4)x + 1$
उत्तर: $x^2 - 4x + 1$

विगत वर्षों के बोर्ड प्रश्न (PYQs: 2024-2026)

प्रश्न 1: यदि द्विघात बहुपद $kx^2 + 3x + k$ का एक शून्यक 2 है, तो k का मान ज्ञात कीजिए। [CBSE 2024, RBSE 2022]

हल: चूँकि 2 बहुपद $p(x) = kx^2 + 3x + k$ का शून्यक है, इसलिए $p(2) = 0$ होगा।

$x = 2$ रखने पर:

$$k(2)^2 + 3(2) + k = 0$$

$$4k + 6 + k = 0$$

$$5k + 6 = 0 \Rightarrow 5k = -6 \Rightarrow k = -\frac{6}{5}$$

प्रश्न 2: एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए जिसके शून्यक -3 और 4 हैं। [RBSE 2025, CBSE 2023]

हल: यहाँ शून्यक दिए गए हैं, योग और गुणनफल नहीं!

$$\alpha = -3 \text{ और } \beta = 4$$

$$\text{शून्यकों का योग} = -3 + 4 = 1$$

$$\text{शून्यकों का गुणनफल} = -3 \times 4 = -12$$

$$\begin{aligned} \text{बहुपद} &= x^2 - (\text{योग})x + \text{गुणनफल} \\ &= x^2 - (1)x + (-12) \end{aligned}$$

$$\text{उत्तर: } x^2 - x - 12$$

प्रश्न 3: यदि α और β द्विघात बहुपद $f(x) = x^2 - 4x + 3$ के शून्यक हैं, तो $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2$ का मान ज्ञात कीजिए। [CBSE 2026, RBSE 2024]

हल: बहुपद $x^2 - 4x + 3$ की तुलना $ax^2 + bx + c$ से करने पर: $a = 1, b = -4, c = 3$

$$\text{शून्यकों का योग } (\alpha + \beta) = -\frac{b}{a} = 4$$

$$\text{शून्यकों का गुणनफल } (\alpha\beta) = \frac{c}{a} = 3$$

हमें मान निकालना है: $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2$

इसमें से $\alpha\beta$ कॉमन (common) लेने पर:

$$= \alpha\beta(\alpha + \beta)$$

अब मान रखने पर:

$$= 3 \times 4 = 12$$

उत्तर: 12

भविष्य के लिए महत्वपूर्ण संभावित प्रश्न (Future Expected)

प्रश्न 1: यदि बहुपद $x^2 - 8x + k$ के शून्यकों के वर्गों का योग 40 है, तो k का मान ज्ञात कीजिए। (Important for High Scorers)

हल: मान लीजिए शून्यक α और β हैं।

$$\text{दिया है: } \alpha^2 + \beta^2 = 40$$

$$\text{हम जानते हैं: } \alpha + \beta = 8 \text{ और } \alpha\beta = k$$

$$\text{सूत्र का प्रयोग करें: } (\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta$$

$$(8)^2 = 40 + 2(k)$$

$$64 = 40 + 2k$$

$$24 = 2k \Rightarrow k = 12$$

उत्तर: $k = 12$

प्रश्न 2: ग्राफ़ देखकर बताएँ कि यदि कोई परवलय (Parabola) x -अक्ष को स्पर्श नहीं करता है, तो उसके कितने वास्तविक शून्यक होंगे?

हल: शून्य (0)। क्योंकि शून्यक तभी होते हैं जब ग्राफ x -अक्ष को प्रतिच्छेद या स्पर्श करे। यदि यह x -अक्ष को नहीं काटता है, तो इसके कोई वास्तविक शून्यक नहीं होते (काल्पनिक शून्यक होते हैं)।

प्रश्न 3: द्विघात बहुपद $x^2 - 11$ के शून्यक क्या होंगे?

हल: $x^2 - 11 = 0 \Rightarrow x^2 = 11 \Rightarrow x = \pm\sqrt{11}$

शून्यक: $\sqrt{11}$ और $-\sqrt{11}$

Schorbit.com