अध्याय 13: सांख्यिकी

Class 10 Math Chapter 13 Solutions (Hindi Medium)

प्रश्नावली 13.1

प्र 1. विद्यार्थियों के एक समूह द्वारा अपने पर्यावरण संचेतना अभियान के अंतर्गत एक सर्वेक्षण किया गया, जिसमें उन्होंने एक मोहल्ले के 20 घरों में लगे हुए पौधों से संबंधित निम्नलिखित आँकड़े एकत्रित किए। प्रति घर माध्य पौधों की संख्या ज्ञात कीजिए। माध्य ज्ञात करने के लिए आपने किस विधि का प्रयोग किया और क्यों?

पौधों की संख्या	0 - 2	2 - 4	4 - 6	6 - 8	8 - 10	10 - 12	12 - 14
घरों की संख्या	1	2	1	5	6	2	3

यहाँ x_i और f_i के मान छोटे हैं, इसलिए हम **प्रत्यक्ष विधि (Direct Method)** का प्रयोग करेंगे।

वर्ग चिह्न (Class mark) $x_i = \frac{\text{Upper class limit} + \text{Lower class limit}}{2}$

पौधों की संख्या (वर्ग अंतराल)	घरों की संख्या (बारंबारता f_i)	वर्ग चिह्न (x_i)	$f_i \times x_i$
0 - 2	1	1	1
2 - 4	2	3	6
4 - 6	1	5	5
6 - 8	5	7	35
8 - 10	6	9	54
10 - 12	2	11	22
12 - 14	3	13	39
योग (Total)	$\sum f_i = 20$		$\sum f_i x_i = 162$

माध्य $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$

$\bar{x} = \frac{162}{20} = 8.1$

अतः प्रति घर माध्य पौधों की संख्या 8.1 है।

प्र 2. किसी कारखाने के 50 श्रमिकों की दैनिक मज़दूरी के निम्नलिखित बंटन पर विचार कीजिए:

दैनिक मज़दूरी (रुपयों में)	500 - 520	520 - 540	540 - 560	560 - 580	580 - 600
श्रमिकों की संख्या	12	14	8	6	10

एक उपयुक्त विधि का प्रयोग करते हुए, इस कारखाने के श्रमिकों की माध्य दैनिक मज़दूरी ज्ञात कीजिए।

यहाँ x_i और f_i के मान बड़े हैं, इसलिए गणना को सरल बनाने के लिए हम **कल्पित माध्य विधि (Assumed Mean Method)** या **पग-विचलन विधि (Step-deviation Method)** का प्रयोग कर सकते हैं। यहाँ हम पग-विचलन विधि का प्रयोग कर रहे हैं।

माना कल्पित माध्य $a = 550$ और वर्ग माप $h = 20$ है।

दैनिक मज़दूरी	श्रमिकों की संख्या (f_i)	वर्ग चिह्न (x_i)	$u_i = \frac{x_i - 550}{20}$	$f_i \times u_i$
500 - 520	12	510	-2	-24
520 - 540	14	530	-1	-14
540 - 560	8	**550** (a)	0	0
560 - 580	6	570	1	6
580 - 600	10	590	2	20
योग	$\sum f_i = 50$			$\sum f_i u_i = -12$

माध्य $\bar{x} = a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h$

$\bar{x} = 550 + \left(\frac{-12}{50}\right) \times 20$

$\bar{x} = 550 - \frac{24}{5} = 550 - 4.8 = 545.2$

scholbit

अतः कारखाने के श्रमिकों की माध्य दैनिक मज़दूरी ₹ 545.20 है।

प्र 3. निम्नलिखित बंटन एक मोहल्ले के बच्चों के दैनिक जेबखर्च दर्शाता है। माध्य जेबखर्च ₹ 18 है। लुप्त बारंबारता f ज्ञात कीजिए :

दैनिक जेबखर्च (रुपयों में)	11 - 13	13 - 15	15 - 17	17 - 19	19 - 21	21 - 23	23 - 25
बच्चों की संख्या	7	6	9	13	f	5	4

यहाँ हम **कल्पित माध्य विधि (Assumed Mean Method)** का उपयोग करेंगे। माना कल्पित माध्य $a = 18$ है।

दैनिक जेबखर्च	बच्चों की संख्या (f_i)	वर्ग चिह्न (x_i)	$d_i = x_i - 18$	$f_i d_i$
11 - 13	7	12	-6	-42
13 - 15	6	14	-4	-24
15 - 17	9	16	-2	-18
17 - 19	13	**18** (a)	0	0
19 - 21	f	20	2	$2f$
21 - 23	5	22	4	20
23 - 25	4	24	6	24
योग	$\sum f_i = 44 + f$			$\sum f_i d_i = 2f - 40$

दिया है, माध्य $\bar{x} = 18$

माध्य $\bar{x} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

$18 = 18 + \frac{2f-40}{44+f}$

$0 = \frac{2f-40}{44+f}$

$2f - 40 = 0$

$2f = 40 \Rightarrow f = 20$

अतः लुप्त बारंबारता f का मान 20 है।

प्र 4. किसी अस्पताल में, एक डॉक्टर द्वारा 30 महिलाओं की जाँच की गई और उनके हृदय स्पंदन (heart beats) की प्रति मिनट संख्या नोट करके नीचे दर्शाए अनुसार संक्षिप्त रूप में लिखी गई। एक उपयुक्त विधि चुनते हुए, इन महिलाओं के हृदय स्पंदन की प्रति मिनट माध्य संख्या ज्ञात कीजिए।

हृदय स्पंदन की प्रति मिनट संख्या	65 - 68	68 - 71	71 - 74	74 - 77	77 - 80	80 - 83	83 - 86
महिलाओं की संख्या	2	4	3	8	7	4	2

यहाँ हम **पग-विचलन विधि (Step-deviation Method)** का प्रयोग करेंगे। माना कल्पित माध्य $a = 75.5$ और वर्ग माप $h = 3$ है।

स्पंदन की संख्या	महिलाओं की संख्या (f_i)	वर्ग चिह्न (x_i)	$u_i = \frac{x_i - 75.5}{3}$	$f_i u_i$
65 - 68	2	66.5	-3	-6
68 - 71	4	69.5	-2	-8
71 - 74	3	72.5	-1	-3
74 - 77	8	**75.5** (a)	0	0
77 - 80	7	78.5	1	7
80 - 83	4	81.5	2	8
83 - 86	2	84.5	3	6
योग	$\sum f_i = 30$			$\sum f_i u_i = 4$

माध्य $\bar{x} = a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h$

$\bar{x} = 75.5 + \left(\frac{4}{30}\right) \times 3$

$\bar{x} = 75.5 + \frac{4}{10} = 75.5 + 0.4 = 75.9$

अतः महिलाओं के हृदय स्पंदन की प्रति मिनट माध्य संख्या 75.9 है।

प्र 5. किसी फुटकर बाज़ार में, फल विक्रेता पेटियों में रखे आम बेच रहे थे। इन पेटियों में आमों की संख्याएँ भिन्न-भिन्न थीं। पेटियों की संख्या के अनुसार, आमों का बंटन निम्नलिखित था :

आमों की संख्या	50 - 52	53 - 55	56 - 58	59 - 61	62 - 64
पेटियों की संख्या	15	110	135	115	25

एक पेटी में रखे आमों की माध्य संख्या ज्ञात कीजिए। आपने माध्य ज्ञात करने की किस विधि का प्रयोग किया है?

यहाँ वर्ग अंतराल सतत (continuous) नहीं हैं (जैसे 50-52 के बाद 53-55 है)। अतः इसे सतत बनाने के लिए निचली सीमा में से 0.5 घटाएँगे और ऊपरी सीमा में 0.5 जोड़ेंगे।

सतत वर्ग अंतराल: 49.5 - 52.5, 52.5 - 55.5, ...

हम **पग-विचलन विधि (Step-deviation Method)** का प्रयोग करेंगे। माना कल्पित माध्य $a = 57$ और वर्ग माप $h = 3$ है।

आमों की संख्या (सतत)	पेटियों की संख्या (f_i)	वर्ग चिह्न (x_i)	$u_i = \frac{x_i - 57}{3}$	$f_i u_i$
49.5 - 52.5	15	51	-2	-30
52.5 - 55.5	110	54	-1	-110
55.5 - 58.5	135	**57** (a)	0	0
58.5 - 61.5	115	60	1	115
61.5 - 64.5	25	63	2	50
योग	$\sum f_i = 400$			$\sum f_i u_i = 25$

माध्य $\bar{x} = a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h$

$\bar{x} = 57 + \left(\frac{25}{400}\right) \times 3$

$\bar{x} = 57 + \frac{1}{16} \times 3 = 57 + \frac{3}{16} = 57 + 0.1875 = 57.1875 \approx 57.19$

अतः एक पेटी में रखे आमों की माध्य संख्या लगभग 57.19 है।

प्र 6. निम्नलिखित सारणी किसी मोहल्ले के 25 परिवारों में भोजन पर हुए दैनिक व्यय को दर्शाती है :

दैनिक व्यय (रुपयों में)	100 - 150	150 - 200	200 - 250	250 - 300	300 - 350
परिवारों की संख्या	4	5	12	2	2

एक उपयुक्त विधि द्वारा भोजन पर हुआ माध्य दैनिक व्यय ज्ञात कीजिए।

हम **पग-विचलन विधि (Step-deviation Method)** का प्रयोग करेंगे। माना कल्पित माध्य $a = 225$ और वर्ग माप $h = 50$ है।

दैनिक व्यय	परिवारों की संख्या (f_i)	वर्ग चिह्न (x_i)	$u_i = \frac{x_i - 225}{50}$	$f_i u_i$
100 - 150	4	125	-2	-8
150 - 200	5	175	-1	-5
200 - 250	12	**225** (a)	0	0
250 - 300	2	275	1	2
300 - 350	2	325	2	4
योग	$\sum f_i = 25$			$\sum f_i u_i = -7$

माध्य $\bar{x} = a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h$

$\bar{x} = 225 + \left(\frac{-7}{25}\right) \times 50$

$\bar{x} = 225 - 7 \times 2 = 225 - 14 = 211$

अतः भोजन पर हुआ माध्य दैनिक व्यय ₹ 211 है।

प्र 7. वायु में सल्फर डाइऑक्साइड (SO_2) की सांद्रता (भाग प्रति मिलियन में) को ज्ञात करने के लिए, एक नगर के 30 मोहल्लों से आँकड़े एकत्रित किए गए, जिन्हें नीचे प्रस्तुत किया गया है :

SO_2 की सांद्रता	0.00 - 0.04	0.04 - 0.08	0.08 - 0.12	0.12 - 0.16	0.16 - 0.20	0.20 - 0.24
बारंबारता	4	9	9	2	4	2

वायु में SO_2 की सांद्रता का माध्य ज्ञात कीजिए।

हम **प्रत्यक्ष विधि (Direct Method)** का प्रयोग करेंगे, क्योंकि x_i और f_i के मान छोटे हैं।

सांद्रता	बारंबारता (f_i)	वर्ग चिह्न (x_i)	$f_i x_i$
0.00 - 0.04	4	0.02	0.08
0.04 - 0.08	9	0.06	0.54
0.08 - 0.12	9	0.10	0.90
0.12 - 0.16	2	0.14	0.28
0.16 - 0.20	4	0.18	0.72
0.20 - 0.24	2	0.22	0.44
योग	$\sum f_i = 30$		$\sum f_i x_i = 2.96$

माध्य $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$

$\bar{x} = \frac{2.96}{30} = 0.0986... \approx 0.099$

अतः वायु में SO_2 की सांद्रता का माध्य 0.099 ppm है।

Schorbit

प्र 8. किसी कक्षा अध्यापिका ने पूरे सत्र के लिए अपनी कक्षा के 40 विद्यार्थियों की अनुपस्थिति निम्नलिखित रूप में रिकॉर्ड (record) की। एक विद्यार्थी जितने दिन अनुपस्थित रहा उनका माध्य ज्ञात कीजिए :

दिनों की संख्या	0 - 6	6 - 10	10 - 14	14 - 20	20 - 28	28 - 38	38 - 40
विद्यार्थियों की संख्या	11	10	7	4	4	3	1

यहाँ वर्ग अंतराल की माप (Class size) समान नहीं है। इसलिए हम **कल्पित माध्य विधि (Assumed Mean Method)** का उपयोग करेंगे। माना कल्पित माध्य $a = 17$ है।

दिनों की संख्या	विद्यार्थियों की संख्या (f_i)	वर्ग चिह्न (x_i)	$d_i = x_i - 17$	$f_i d_i$
0 - 6	11	3	-14	-154
6 - 10	10	8	-9	-90
10 - 14	7	12	-5	-35
14 - 20	4	**17** (a)	0	0
20 - 28	4	24	7	28
28 - 38	3	33	16	48
38 - 40	1	39	22	22
योग	$\sum f_i = 40$			$\sum f_i d_i = -181$

माध्य $\bar{x} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

$\bar{x} = 17 + \frac{-181}{40} = 17 - 4.525 = 12.475 \approx 12.48$

अतः एक विद्यार्थी जितने दिन अनुपस्थित रहा उनका माध्य 12.48 दिन है।

प्र 9. निम्नलिखित सारणी 35 नगरों की साक्षरता दर (प्रतिशत में) दर्शाती है। माध्य साक्षरता दर ज्ञात कीजिए :

साक्षरता दर (%)	45 - 55	55 - 65	65 - 75	75 - 85	85 - 95
नगरों की संख्या	3	10	11	8	3

हम **पग-विचलन विधि (Step-deviation Method)** का प्रयोग करेंगे। माना कल्पित माध्य $a = 70$ और वर्ग माप $h = 10$ है।

साक्षरता दर	नगरों की संख्या (f_i)	वर्ग चिह्न (x_i)	$u_i = \frac{x_i - 70}{10}$	$f_i u_i$
45 - 55	3	50	-2	-6
55 - 65	10	60	-1	-10
65 - 75	11	**70** (a)	0	0
75 - 85	8	80	1	8
85 - 95	3	90	2	6
योग	$\sum f_i = 35$			$\sum f_i u_i = -2$

माध्य $\bar{x} = a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h$

$\bar{x} = 70 + \left(\frac{-2}{35}\right) \times 10$

$\bar{x} = 70 - \frac{20}{35} = 70 - \frac{4}{7} = 70 - 0.57 = 69.43$

अतः माध्य साक्षरता दर 69.43% है।

Schorbit

प्रश्नावली 13.2

प्र 1. निम्नलिखित सारणी किसी अस्पताल में एक विशेष वर्ष में भर्ती हुए रोगियों की आयु को दर्शाती है:

आयु (वर्षों में)	5 - 15	15 - 25	25 - 35	35 - 45	45 - 55	55 - 65
रोगियों की संख्या	6	11	21	23	14	5

उपरोक्त आँकड़ों के बहुलक और माध्य ज्ञात कीजिए। दोनों केंद्रीय प्रवृत्ति की मापों की तुलना कीजिए और उनकी व्याख्या कीजिए।

बहुलक (Mode) ज्ञात करना:

सबसे अधिक बारंबारता 23 है, जो वर्ग अंतराल 35 - 45 में स्थित है।

अतः बहुलक वर्ग (Modal class) = 35 - 45

$l = 35$ (बहुलक वर्ग की निचली सीमा)

$f_1 = 23$ (बहुलक वर्ग की बारंबारता)

$f_0 = 21$ (बहुलक वर्ग से ठीक पहले वाले वर्ग की बारंबारता)

$f_2 = 14$ (बहुलक वर्ग के ठीक बाद वाले वर्ग की बारंबारता)

$h = 10$ (वर्ग माप)

बहुलक $= l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$

$= 35 + \left(\frac{23-21}{2(23)-21-14}\right) \times 10$

$= 35 + \left(\frac{2}{46-35}\right) \times 10 = 35 + \frac{20}{11} = 35 + 1.81 = 36.81$ वर्ष

माध्य (Mean) ज्ञात करना:

हम प्रत्यक्ष विधि का प्रयोग कर सकते हैं।

आयु (वर्ग अंतराल)	रोगियों की संख्या (f_i)	वर्ग चिह्न (x_i)	$f_i x_i$
5 - 15	6	10	60
15 - 25	11	20	220
25 - 35	21	30	630
35 - 45	23	40	920
45 - 55	14	50	700
55 - 65	5	60	300
योग	$\sum f_i = 80$		$\sum f_i x_i = 2830$

माध्य $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{2830}{80} = 35.375$ वर्ष

व्याख्या: अस्पताल में भर्ती अधिकतम रोगियों की आयु 36.81 वर्ष है (बहुलक), जबकि अस्पताल में भर्ती सभी रोगियों की औसत आयु 35.375 वर्ष है (माध्य)।

प्र 2. निम्नलिखित आँकड़े, 225 बिजली उपकरणों के प्रेक्षित जीवनकाल (घंटों में) की सूचना देते हैं :

जीवनकाल (घंटों में)	0 - 20	20 - 40	40 - 60	60 - 80	80 - 100	100 - 120
बारंबारता	10	35	52	61	38	29

उपकरणों का बहुलक जीवनकाल ज्ञात कीजिए।

सबसे अधिक बारंबारता 61 है, जो वर्ग अंतराल 60 - 80 में स्थित है।

अतः बहुलक वर्ग (Modal class) = 60 - 80

$l = 60$

$f_1 = 61$

$f_0 = 52$

$f_2 = 38$

$h = 20$

बहुलक $= l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$

$= 60 + \left(\frac{61-52}{2(61)-52-38}\right) \times 20$

$= 60 + \left(\frac{9}{122-90}\right) \times 20 = 60 + \left(\frac{9}{32}\right) \times 20$

$= 60 + \frac{180}{32} = 60 + 5.625 = 65.625$ घंटे

अतः उपकरणों का बहुलक जीवनकाल 65.625 घंटे है।

प्र 3. निम्नलिखित आँकड़े किसी गाँव के 200 परिवारों के कुल मासिक घरेलू व्यय के बंटन को दर्शाते हैं। इन परिवारों का बहुलक मासिक व्यय ज्ञात कीजिए। साथ ही, माध्य मासिक व्यय भी ज्ञात कीजिए।

व्यय (₹ में)	परिवारों की संख्या
1000 - 1500	24
1500 - 2000	40
2000 - 2500	33
2500 - 3000	28
3000 - 3500	30
3500 - 4000	22
4000 - 4500	16
4500 - 5000	7

बहुलक (Mode) ज्ञात करना:

सबसे अधिक बारंबारता 40 है, जो वर्ग अंतराल 1500 - 2000 में है।

अतः बहुलक वर्ग = 1500 - 2000

$l = 1500, f_1 = 40, f_0 = 24, f_2 = 33, h = 500$

बहुलक $= l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$

Schorbit

$= 1500 + \left(\frac{40-24}{2(40)-24-33}\right) \times 500$

$= 1500 + \left(\frac{16}{80-57}\right) \times 500 = 1500 + \frac{16}{23} \times 500$

$= 1500 + \frac{8000}{23} = 1500 + 347.826 = 1847.83$ ₹

माध्य (Mean) ज्ञात करना: (पग-विचलन विधि, $a = 2750, h = 500$)

व्यय	परिवार (f_i)	x_i	$u_i = \frac{x_i-2750}{500}$	f_iu_i
1000 - 1500	24	1250	-3	-72
1500 - 2000	40	1750	-2	-80
2000 - 2500	33	2250	-1	-33
2500 - 3000	28	**2750** (a)	0	0
3000 - 3500	30	3250	1	30
3500 - 4000	22	3750	2	44
4000 - 4500	16	4250	3	48
4500 - 5000	7	4750	4	28
योग	$\sum f_i = 200$			$\sum f_iu_i = -35$

माध्य $\bar{x} = 2750 + \left(\frac{-35}{200}\right) \times 500 = 2750 - \frac{175}{2} = 2750 - 87.5 = 2662.50$ ₹

अतः बहुलक व्यय ₹ 1847.83 है और माध्य व्यय ₹ 2662.50 है।

Schorbit

प्र 4. **निम्नलिखित बंटन भारत के उच्चतर माध्यमिक स्कूलों में, राज्यों के अनुसार, शिक्षक-विद्यार्थी अनुपात को दर्शाता है। इन आँकड़ों के बहुलक और माध्य ज्ञात कीजिए। दोनों मापों की व्याख्या कीजिए।**

प्रति शिक्षक विद्यार्थियों की संख्या	राज्य/संघीय क्षेत्रों की संख्या
15 - 20	3
20 - 25	8
25 - 30	9
30 - 35	10
35 - 40	3
40 - 45	0
45 - 50	0
50 - 55	2

बहुलक (Mode) ज्ञात करना:

सबसे अधिक बारंबारता 10 है, अतः बहुलक वर्ग = 30 - 35

$l = 30, f_1 = 10, f_0 = 9, f_2 = 3, h = 5$

बहुलक $= l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$

$= 30 + \left(\frac{10-9}{2(10)-9-3}\right) \times 5$

$= 30 + \left(\frac{1}{20-12}\right) \times 5 = 30 + \frac{5}{8} = 30 + 0.625 = 30.625 \approx 30.6$

माध्य (Mean) ज्ञात करना: (प्रत्यक्ष विधि या पग-विचलन विधि)

पग-विचलन विधि ($a = 32.5, h = 5$):

विद्यार्थी/शिक्षक	राज्य (f_i)	x_i	$u_i = \frac{x_i - 32.5}{5}$	$f_i u_i$
15 - 20	3	17.5	-3	-9
20 - 25	8	22.5	-2	-16
25 - 30	9	27.5	-1	-9
30 - 35	10	**32.5** (a)	0	0
35 - 40	3	37.5	1	3
40 - 45	0	42.5	2	0
45 - 50	0	47.5	3	0
50 - 55	2	52.5	4	8
योग	$\sum f_i = 35$			$\sum f_i u_i = -23$

माध्य $\bar{x} = 32.5 + \left(\frac{-23}{35}\right) \times 5 = 32.5 - \frac{23}{7} = 32.5 - 3.28 = 29.22$

व्याख्या: अधिकांश राज्यों/संघीय क्षेत्रों में प्रति शिक्षक 30.6 विद्यार्थी हैं (बहुलक), जबकि औसतन प्रति शिक्षक 29.2 विद्यार्थी हैं (माध्य)।

प्र 5. दिया हुआ बंटन विश्व के कुछ श्रेष्ठतम बल्लेबाज़ों द्वारा एक दिवसीय अंतर्राष्ट्रीय क्रिकेट मैचों में बनाए गए रनों को दर्शाता है :

बनाए गए रन	बल्लेबाज़ों की संख्या
3000 - 4000	4
4000 - 5000	18
5000 - 6000	9
6000 - 7000	7
7000 - 8000	6
8000 - 9000	3
9000 - 10000	1
10000 - 11000	1

इन आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

सबसे अधिक बारंबारता 18 है, अतः बहुलक वर्ग = 4000 - 5000

$l = 4000, f_1 = 18, f_0 = 4, f_2 = 9, h = 1000$

बहुलक $= l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$

$= 4000 + \left(\frac{18-4}{2(18)-4-9}\right) \times 1000$

$= 4000 + \left(\frac{14}{36-13}\right) \times 1000 = 4000 + \frac{14}{23} \times 1000$

$= 4000 + \frac{14000}{23} = 4000 + 608.695...$

$= 4608.7$ (लगभग)

अतः बनाए गए रनों का बहुलक 4608.7 रन है।

प्र 6. एक विद्यार्थी ने एक सड़क के किसी स्थान से होकर जाती हुई कारों की संख्याएँ नोट कीं और उन्हें नीचे दी हुई सारणी के रूप में व्यक्त किया। सारणी में दिया प्रत्येक प्रेक्षण 3 मिनट के अंतराल में उस स्थान से होकर जाने वाली कारों की संख्याओं से संबंधित है। ऐसे 100 अंतरालों पर प्रेक्षण लिए गए। इन आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

कारों की संख्या	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80
बारंबारता	7	14	13	12	20	11	15	8

सबसे अधिक बारंबारता 20 है, अतः बहुलक वर्ग = 40 - 50

$l = 40, f_1 = 20, f_0 = 12, f_2 = 11, h = 10$

बहुलक $= l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$

$= 40 + \left(\frac{20-12}{2(20)-12-11}\right) \times 10$

$= 40 + \left(\frac{8}{40-23}\right) \times 10 = 40 + \frac{80}{17}$

$= 40 + 4.705... = 44.7$ (लगभग)

अतः कारों की संख्या का बहुलक 44.7 कारें है।

Schorbit

प्रश्नावली 13.3

प्र 1. निम्नलिखित बारंबारता बंटन किसी मोहल्ले के 68 उपभोक्ताओं की बिजली की मासिक खपत दर्शाता है। इन आँकड़ों के माध्यक, माध्य और बहुलक ज्ञात कीजिए। इनकी तुलना कीजिए।

मासिक खपत (इकाइयों में)	65 - 85	85 - 105	105 - 125	125 - 145	145 - 165	165 - 185	185 - 205
उपभोक्ताओं की संख्या	4	5	13	20	14	8	4

माध्यक (Median) ज्ञात करना:

मासिक खपत (वर्ग अंतराल)	बारंबारता (f)	संचयी बारंबारता (cf)
65 - 85	4	4
85 - 105	5	9
105 - 125	13	22
125 - 145 (माध्यक वर्ग)	**20**	**42**
145 - 165	14	56
165 - 185	8	64
185 - 205	4	68
योग	$n = 68$	

यहाँ $n = 68$, अतः $\frac{n}{2} = 34$

संचयी बारंबारता 34 से ठीक अधिक 42 है, जो वर्ग 125 - 145 में है।

अतः माध्यक वर्ग (Median class) = 125 - 145

$l = 125, cf = 22$ (माध्यक वर्ग से ठीक पहले वर्ग की संचयी बारंबारता), $f = 20$ (माध्यक वर्ग की बारंबारता), $h = 20$

माध्यक $= l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h$

$= 125 + \left(\frac{34-22}{20}\right) \times 20 = 125 + \left(\frac{12}{20}\right) \times 20 = 125 + 12 = 137$ इकाइयाँ

बहुलक (Mode) ज्ञात करना:

सबसे अधिक बारंबारता 20 है, अतः बहुलक वर्ग = 125 - 145

$l = 125, f_1 = 20, f_0 = 13, f_2 = 14, h = 20$

बहुलक $= 125 + \left(\frac{20-13}{2(20)-13-14}\right) \times 20 = 125 + \left(\frac{7}{40-27}\right) \times 20$

$= 125 + \frac{140}{13} = 125 + 10.76... = 135.76$ इकाइयाँ

माध्य (Mean) ज्ञात करना: (कल्पित माध्य या पग-विचलन विधि द्वारा, $a = 135, h = 20$)

$\bar{x} = a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h = 135 + \left(\frac{7}{68}\right) \times 20 = 135 + \frac{140}{68} = 135 + 2.05... = 137.05$ इकाइयाँ

अतः माध्यक 137 इकाइयाँ, बहुलक 135.76 इकाइयाँ और माध्य 137.05 इकाइयाँ है। तीनों मान लगभग समान हैं।

प्र 2. नीचे दिए हुए बंटन का माध्यक 28.5 हो, तो x और y के मान ज्ञात कीजिए :

वर्ग अंतराल	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	योग
बारंबारता	5	x	20	15	y	5	60

वर्ग अंतराल	बारंबारता (f)	संचयी बारंबारता (cf)
0 - 10	5	5
10 - 20	x	$5+x$
20 - 30	20	$25+x$
30 - 40	15	$40+x$
40 - 50	y	$40+x+y$
50 - 60	5	$45+x+y$
योग	$n=60$	

कुल बारंबारता $n=60$ दी गई है।

अतः $45+x+y=60 \Rightarrow x+y=15$ ... (समीकरण 1)

चूँकि माध्यक = 28.5 है, जो वर्ग अंतराल 20 - 30 में स्थित है।

अतः माध्यक वर्ग = 20 - 30

यहाँ $l=20$, $n/2=30$, $cf=5+x$ (ठीक पहले वाले वर्ग की संचयी बारंबारता),
$f=20, h=10$

माध्यक $=l+\left(\frac{\frac{n}{2}-cf}{f}\right)\times h$

$28.5=20+\left(\frac{30-(5+x)}{20}\right)\times 10$

$8.5=\frac{25-x}{2}$

$17=25-x$

$x = 25 - 17 = 8$

x का मान समीकरण 1 में रखने पर:

$8 + y = 15 \Rightarrow y = 7$

अतः $x = 8$ और $y = 7$ है।

प्र 3. **एक जीवन बीमा एजेंट 100 पॉलिसी धारकों की आयु के बंटन के निम्नलिखित आँकड़े ज्ञात करता है। माध्यक आयु परिकलित कीजिए, यदि पॉलिसी केवल उन्हीं व्यक्तियों को दी जाती है, जिनकी आयु 18 वर्ष या उससे अधिक हो, परंतु 60 वर्ष से कम हो।**

आयु (वर्षों में)	पॉलिसी धारकों की संख्या
20 से कम	2
25 से कम	6
30 से कम	24
35 से कम	45
40 से कम	78
45 से कम	89
50 से कम	92
55 से कम	98
60 से कम	100

दी गई सारणी एक 'से कम' (less than) प्रकार की संचयी बारंबारता सारणी है। इसे वर्ग अंतराल में बदलते हैं:

आयु (वर्ग अंतराल)	बारंबारता (f)	संचयी बारंबारता (cf)
15 - 20	2	2
20 - 25	$6 - 2 = 4$	6
25 - 30	$24 - 6 = 18$	24
30 - 35 (माध्यक वर्ग)	$45 - 24 = 21$	**45**
35 - 40	$78 - 45 = 33$	78
40 - 45	$89 - 78 = 11$	89
45 - 50	$92 - 89 = 3$	92
50 - 55	$98 - 92 = 6$	98
55 - 60	$100 - 98 = 2$	100

यहाँ $n = 100$, अतः $\frac{n}{2} = 50$

संचयी बारंबारता 50 से ठीक अधिक 78 है, अतः माध्यक वर्ग 35 - 40 है।

यहाँ $l = 35$, $cf = 45$, $f = 33$, $h = 5$

माध्यक $= l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h$

$= 35 + \left(\frac{50-45}{33}\right) \times 5 = 35 + \left(\frac{5}{33}\right) \times 5 = 35 + \frac{25}{33}$

$= 35 + 0.757... = 35.76$ वर्ष

अतः पॉलिसी धारकों की माध्यक आयु 35.76 वर्ष है।

प्र 4. एक पौधे की 40 पत्तियों की लंबाइयाँ निकटतम मिलीमीटरों में मापी जाती हैं तथा प्राप्त आँकड़ों को निम्नलिखित सारणी के रूप में निरूपित किया जाता है :

लंबाई (mm में)	118 - 126	127 - 135	136 - 144	145 - 153	154 - 162	163 - 171	172 - 180
पत्तियों की संख्या	3	5	9	12	5	4	2

पत्तियों की माध्यक लंबाई ज्ञात कीजिए।

यहाँ वर्ग अंतराल सतत (continuous) नहीं हैं। इन्हें सतत बनाने के लिए निचली सीमा में से 0.5 घटाएँगे और ऊपरी सीमा में 0.5 जोड़ेंगे।

लंबाई (सतत वर्ग अंतराल)	बारंबारता (f)	संचयी बारंबारता (cf)
117.5 - 126.5	3	3
126.5 - 135.5	5	8
135.5 - 144.5	9	17
144.5 - 153.5 (माध्यक वर्ग)	**12**	**29**
153.5 - 162.5	5	34
162.5 - 171.5	4	38
171.5 - 180.5	2	40

यहाँ $n = 40$, अतः $\frac{n}{2} = 20$

संचयी बारंबारता 20 से ठीक अधिक 29 है, अतः माध्यक वर्ग 144.5 - 153.5 है।

$l = 144.5$, $cf = 17$, $f = 12$, $h = 9$ (चूँकि 153.5 - 144.5 = 9)

माध्यक $= l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h$

$= 144.5 + \left(\frac{20-17}{12}\right) \times 9 = 144.5 + \left(\frac{3}{12}\right) \times 9$

$= 144.5 + \frac{27}{12} = 144.5 + 2.25 = 146.75$ mm

अतः पत्तियों की माध्यक लंबाई 146.75 mm है।

Schorbit

प्र 5. निम्नलिखित सारणी 400 नियॉन लैंपों के जीवनकालों (life times) को प्रदर्शित करती है :

जीवनकाल (घंटों में)	लैंपों की संख्या
1500 - 2000	14
2000 - 2500	56
2500 - 3000	60
3000 - 3500	86
3500 - 4000	74
4000 - 4500	62
4500 - 5000	48

एक लैंप का माध्यक जीवनकाल ज्ञात कीजिए।

जीवनकाल	बारंबारता (f)	संचयी बारंबारता (cf)
1500 - 2000	14	14
2000 - 2500	56	70
2500 - 3000	60	130
3000 - 3500 (माध्यक वर्ग)	**86**	**216**
3500 - 4000	74	290
4000 - 4500	62	352
4500 - 5000	48	400

यहाँ $n = 400$, अतः $\frac{n}{2} = 200$

संचयी बारंबारता 200 से ठीक अधिक 216 है, अतः माध्यक वर्ग 3000 - 3500 है।

$l = 3000$, $cf = 130$, $f = 86$, $h = 500$

माध्यक $= l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h$

$= 3000 + \left(\frac{200-130}{86}\right) \times 500 = 3000 + \frac{70 \times 500}{86}$

$= 3000 + \frac{35000}{86} = 3000 + 406.976\ldots = 3406.98$ (लगभग)

अतः एक लैंप का माध्यक जीवनकाल 3406.98 घंटे है।

प्र 6. एक स्थानीय टेलीफ़ोन निर्देशिका से 100 कुलनाम (surnames) लिए गए और उनमें प्रयुक्त अंग्रेज़ी वर्णमाला के अक्षरों की संख्या का निम्नलिखित बारंबारता बंटन प्राप्त हुआ :

अक्षरों की संख्या	1 - 4	4 - 7	7 - 10	10 - 13	13 - 16	16 - 19
कुलनामों की संख्या	6	30	40	16	4	4

कुलनामों में माध्यक अक्षरों की संख्या ज्ञात कीजिए। कुलनामों में माध्य अक्षरों की संख्या ज्ञात कीजिए। साथ ही, कुलनामों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

माध्यक (Median) ज्ञात करना:

अक्षरों की संख्या	बारंबारता (f)	संचयी बारंबारता (cf)
1 - 4	6	6
4 - 7	30	36
7 - 10 (माध्यक वर्ग)	**40**	**76**
10 - 13	16	92
13 - 16	4	96
16 - 19	4	100

$n = 100 \Rightarrow \frac{n}{2} = 50$. अतः माध्यक वर्ग 7 - 10 है।

$l = 7, cf = 36, f = 40, h = 3$

माध्यक $= 7 + \left(\frac{50-36}{40}\right) \times 3 = 7 + \frac{14 \times 3}{40} = 7 + \frac{42}{40} = 7 + 1.05 = 8.05$ अक्षर

बहुलक (Mode) ज्ञात करना:

सबसे अधिक बारंबारता 40 है, अतः बहुलक वर्ग 7 - 10 है।

$l = 7, f_1 = 40, f_0 = 30, f_2 = 16, h = 3$

बहुलक $= 7 + \left(\frac{40-30}{2(40)-30-16}\right) \times 3 = 7 + \left(\frac{10}{80-46}\right) \times 3 = 7 + \frac{30}{34} = 7 + 0.88 = 7.88$ अक्षर

माध्य (Mean) ज्ञात करना: (प्रत्यक्ष विधि द्वारा)

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{(6\times2.5)+(30\times5.5)+(40\times8.5)+(16\times11.5)+(4\times14.5)+(4\times17.5)}{100}$$

$$\bar{x} = \frac{15+165+340+184+58+70}{100} = \frac{832}{100} = 8.32 \text{ अक्षर}$$

अतः माध्यक 8.05 अक्षर, बहुलक 7.88 अक्षर और माध्य 8.32 अक्षर है।

प्र 7. नीचे दिया हुआ बंटन एक कक्षा के 30 विद्यार्थियों के भार दर्शा रहा है। विद्यार्थियों का माध्यक भार ज्ञात कीजिए।

भार (kg में)	40 - 45	45 - 50	50 - 55	55 - 60	60 - 65	65 - 70	70 - 75
विद्यार्थियों की संख्या	2	3	8	6	6	3	2

भार (kg में)	बारंबारता (f)	संचयी बारंबारता (cf)
40 - 45	2	2
45 - 50	3	5
50 - 55	8	13
55 - 60 (माध्यक वर्ग)	**6**	**19**
60 - 65	6	25
65 - 70	3	28
70 - 75	2	30

यहाँ $n = 30$, अतः $\frac{n}{2} = 15$

संचयी बारंबारता 15 से ठीक अधिक 19 है, अतः माध्यक वर्ग 55 - 60 है।

$l = 55$, $cf = 13$, $f = 6$, $h = 5$

माध्यक $= l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h$

$= 55 + \left(\frac{15-13}{6}\right) \times 5 = 55 + \frac{2}{6} \times 5$

$= 55 + \frac{10}{6} = 55 + 1.666... = 56.67$ kg (लगभग)

अतः विद्यार्थियों का माध्यक भार 56.67 kg है।

Schorbit