अध्याय 11: वृत्तों से संबंधित क्षेत्रफल

Class 10 Math Chapter 11 Solutions (Hindi Medium)

प्रश्नावली 11.1

नोट: जब तक अन्यथा न कहा जाए, $\pi = \frac{22}{7}$ का प्रयोग कीजिए।

प्र 1. **6 cm त्रिज्या वाले एक वृत्त के एक त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसका कोण 60° है।**

दिया है: वृत्त की त्रिज्या $(r) = 6 \text{ cm}$

त्रिज्यखंड का कोण $(\theta) = 60^\circ$

त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल = $\frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2$

$= \frac{60}{360} \times \frac{22}{7} \times 6 \times 6$

$= \frac{1}{6} \times \frac{22}{7} \times 36$

$= \frac{22}{7} \times 6 = \frac{132}{7} \text{ cm}^2$

अतः, त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल $\frac{132}{7} \text{ cm}^2$ है।

प्र 2. एक वृत्त के चतुर्थांश (quadrant) का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी परिधि 22 cm है।

माना वृत्त की त्रिज्या r है।

वृत्त की परिधि (Circumference) $= 2\pi r = 22 \text{ cm}$

$2 \times \frac{22}{7} \times r = 22$

$r = \frac{22 \times 7}{2 \times 22} = \frac{7}{2} \text{ cm}$

वृत्त के चतुर्थांश (quadrant) का कोण $\theta = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$ होता है।

चतुर्थांश का क्षेत्रफल = $\frac{1}{4} \times \pi r^2$

$= \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{7}{2}\right)^2$

$= \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2}$

$= \frac{1}{4} \times \frac{11 \times 7}{2} = \frac{77}{8} \text{ cm}^2$

अतः, वृत्त के चतुर्थांश का क्षेत्रफल $\frac{77}{8} \text{ cm}^2$ है।

प्र 3. एक घड़ी की मिनट की सुई जिसकी लंबाई 14 cm है। इस सुई द्वारा 5 मिनट में रचित क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

मिनट की सुई की लंबाई, वृत्त की त्रिज्या (r) के बराबर होगी। अतः, $r = 14 \text{ cm}$।

हम जानते हैं कि मिनट की सुई 60 मिनट में 360° घूमती है।

इसलिए, 1 मिनट में घूमा गया कोण = $\frac{360^\circ}{60} = 6^\circ$

5 मिनट में घूमा गया कोण $(\theta) = 5 \times 6^\circ = 30^\circ$

5 मिनट में रचित क्षेत्रफल = त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल

$= \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2$

$= \frac{30}{360} \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14$

$= \frac{1}{12} \times 22 \times 2 \times 14$

$= \frac{1}{6} \times 22 \times 14 = \frac{1}{3} \times 11 \times 14 = \frac{154}{3} \text{ cm}^2$

अतः, 5 मिनट में रचित क्षेत्रफल $\frac{154}{3} \text{ cm}^2$ है।

प्र 4. **10 cm त्रिज्या वाले एक वृत्त की कोई जीवा केंद्र पर एक समकोण अंतरित करती है। निम्नलिखित के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए:**
(i) संगत लघु वृत्तखंड (Minor segment)
(ii) संगत दीर्घ त्रिज्यखंड (Major sector)
($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए)

दिया है: त्रिज्या $(r) = 10$ cm, केंद्र पर कोण $(\theta) = 90^\circ$ (समकोण)।

(i) संगत लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल:

लघु त्रिज्यखंड OAB का क्षेत्रफल =
$\frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2 = \frac{90}{360} \times 3.14 \times (10)^2 = \frac{1}{4} \times 3.14 \times 100 = \frac{314}{4} = 78.5 \text{ cm}^2$

$\triangle OAB$ का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times \text{Base} \times \text{Height} = \frac{1}{2} \times 10 \times 10 = 50 \text{ cm}^2$ (चूँकि $\angle O = 90^\circ$)

लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल = (लघु त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल) - ($\triangle OAB$ का क्षेत्रफल)

$= 78.5 - 50 = 28.5 \text{ cm}^2$

(ii) संगत दीर्घ त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल:

दीर्घ त्रिज्यखंड का कोण $= 360^\circ - 90^\circ = 270^\circ$

दीर्घ त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल =
$\frac{270}{360} \times \pi r^2 = \frac{3}{4} \times 3.14 \times 100 = \frac{3}{4} \times 314 = 3 \times 78.5 = 235.5 \text{ cm}^2$

अतः, लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल 28.5 cm^2 और दीर्घ त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल 235.5 cm^2 है।

प्र 5. **त्रिज्या 21 cm वाले वृत्त का एक चाप केंद्र पर 60° का कोण अंतरित करता है। ज्ञात कीजिए:**
(i) चाप की लंबाई
(ii) चाप द्वारा बनाए गए त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल
(iii) संगत जीवा द्वारा बनाए गए वृत्तखंड का क्षेत्रफल

दिया है: त्रिज्या $r = 21 \text{ cm}$, कोण $\theta = 60^\circ$

(i) चाप की लंबाई:

चाप की लंबाई = $\frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi r = \frac{60}{360} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 21$

$= \frac{1}{6} \times 2 \times 22 \times 3 = 22 \text{ cm}$

(ii) त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल:

त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल = $\frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2 = \frac{60}{360} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$

$= \frac{1}{6} \times 22 \times 3 \times 21 = 11 \times 21 = 231 \text{ cm}^2$

(iii) वृत्तखंड का क्षेत्रफल:

वृत्तखंड का क्षेत्रफल = त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल - $\triangle OAB$ का क्षेत्रफल

$\triangle OAB$ में $OA = OB = r$, इसलिए $\angle OAB = \angle OBA$। चूँकि $\angle O = 60^\circ$, अतः $\triangle OAB$ एक समबाहु त्रिभुज (equilateral triangle) है।

समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (21)^2 = \frac{441\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$

अतः, वृत्तखंड का क्षेत्रफल = $\left(231 - \frac{441\sqrt{3}}{4}\right) \text{ cm}^2$

प्र 6. **15 cm त्रिज्या वाले एक वृत्त की कोई जीवा केंद्र पर 60° का कोण अंतरित करती है। संगत लघु और दीर्घ वृत्तखंडों के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।**
($\pi = 3.14$ और $\sqrt{3} = 1.73$ का प्रयोग कीजिए)

त्रिज्या $r = 15$ cm, कोण $\theta = 60^\circ$।

लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल:

त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल = $\frac{60}{360} \times 3.14 \times (15)^2 = \frac{1}{6} \times 3.14 \times 225 = 117.75 \text{ cm}^2$

$\triangle OAB$ (समबाहु त्रिभुज) का क्षेत्रफल = $\frac{\sqrt{3}}{4} r^2 = \frac{1.73}{4} \times 225 = \frac{389.25}{4} = 97.3125 \text{ cm}^2$

लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल = त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल - $\triangle OAB$ का क्षेत्रफल

$= 117.75 - 97.3125 = 20.4375 \text{ cm}^2$

दीर्घ वृत्तखंड का क्षेत्रफल:

वृत्त का कुल क्षेत्रफल = $\pi r^2 = 3.14 \times 225 = 706.5 \text{ cm}^2$

दीर्घ वृत्तखंड का क्षेत्रफल = वृत्त का कुल क्षेत्रफल - लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल

$= 706.5 - 20.4375 = 686.0625 \text{ cm}^2$

अतः लघु वृत्तखंड 20.4375 cm^2 और दीर्घ वृत्तखंड 686.0625 cm^2 है।

प्र 7. **त्रिज्या 12 cm वाले एक वृत्त की कोई जीवा केंद्र पर 120° का कोण अंतरित करती है। संगत वृत्तखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।**
($\pi = 3.14$ और $\sqrt{3} = 1.73$ का प्रयोग कीजिए)

त्रिज्या $r = 12$ cm, कोण $\theta = 120^\circ$।

त्रिज्यखंड OAB का क्षेत्रफल =
$\frac{120}{360} \times 3.14 \times (12)^2 = \frac{1}{3} \times 3.14 \times 144 = 3.14 \times 48 = 150.72 \text{ cm}^2$

$\triangle OAB$ का क्षेत्रफल निकालने के लिए:

केंद्र O से जीवा AB पर लंब OM खींचें। यह $\triangle OAB$ को दो सर्वांगसम समकोण त्रिभुजों में बाँटता है और कोण 120° को दो 60° के कोणों में विभाजित करता है।

समकोण $\triangle OMA$ में:

$\sin 60^\circ = \frac{AM}{OA} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AM}{12} \Rightarrow AM = 6\sqrt{3} \text{ cm}$

अतः जीवा $AB = 2 \times AM = 12\sqrt{3} \text{ cm}$

$\cos 60^\circ = \frac{OM}{OA} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{OM}{12} \Rightarrow OM = 6 \text{ cm}$ (ऊँचाई)

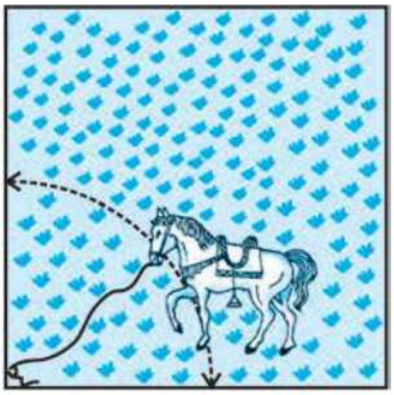
$\triangle OAB$ का क्षेत्रफल =
$\frac{1}{2} \times \text{Base}(AB) \times \text{Height}(OM) = \frac{1}{2} \times 12\sqrt{3} \times 6 = 36\sqrt{3} = 36 \times 1.73 = 62.28 \text{ cm}^2$

संगत वृत्तखंड का क्षेत्रफल = त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल - $\triangle OAB$ का क्षेत्रफल

$= 150.72 - 62.28 = 88.44 \text{ cm}^2$

अतः संगत वृत्तखंड का क्षेत्रफल 88.44 cm^2 है।

प्र 8. **15 m भुजा वाले एक वर्गाकार घास के मैदान के एक कोने पर लगे खूँटे से एक घोड़े को 5 m लंबी रस्सी से बाँध दिया गया है (देखिए आकृति 11.8)। ज्ञात कीजिए:**
(i) मैदान के उस भाग का क्षेत्रफल जहाँ घोड़ा घास चर सकता है।
(ii) चरे जा सकने वाले क्षेत्रफल में वृद्धि, यदि घोड़े को 5 m लंबी रस्सी के स्थान पर 10 m लंबी रस्सी से बाँध दिया जाए। ($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए)



आकृति 11.8

(i) 5 m लंबी रस्सी से चरे जा सकने वाले भाग का क्षेत्रफल:

यहाँ रस्सी की लंबाई, त्रिज्यखंड की त्रिज्या $r = 5 \text{ m}$ है।

मैदान वर्गाकार है, अतः कोने का कोण $\theta = 90^\circ$ होगा।

घोड़े द्वारा चरे जा सकने वाले भाग का क्षेत्रफल = चतुर्थांश का क्षेत्रफल = $\frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2$

$= \frac{90}{360} \times 3.14 \times (5)^2 = \frac{1}{4} \times 3.14 \times 25 = \frac{78.5}{4} = 19.625 \text{ m}^2$

(ii) क्षेत्रफल में वृद्धि यदि रस्सी 10 m हो:

नई त्रिज्या $R = 10 \text{ m}$। कोण $\theta = 90^\circ$।

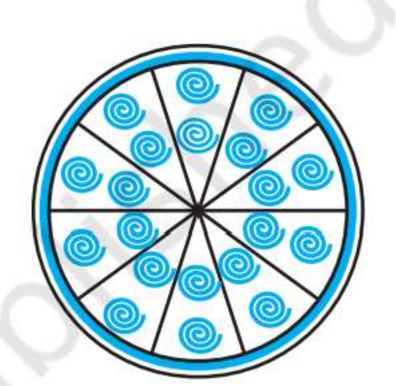
नए भाग का क्षेत्रफल = $\frac{90}{360} \times 3.14 \times (10)^2 = \frac{1}{4} \times 3.14 \times 100 = \frac{314}{4} = 78.5 \text{ m}^2$

क्षेत्रफल में वृद्धि = नया क्षेत्रफल – पुराना क्षेत्रफल

$= 78.5 - 19.625 = 58.875 \text{ m}^2$

अतः क्षेत्रफल में वृद्धि 58.875 m^2 है।

प्र 9. एक वृत्ताकार ब्रूच (brooch) को चाँदी के तार से बनाया जाना है जिसका व्यास 35 mm है। तार को वृत्त के 5 व्यासों को बनाने में भी प्रयुक्त किया गया है जो उसे 10 बराबर त्रिज्यखंडों में विभाजित करता है जैसा कि आकृति 11.9 में दर्शाया गया है। तो ज्ञात कीजिए:
(i) कुल वांछित चाँदी के तार की लंबाई
(ii) ब्रूच के प्रत्येक त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल



आकृति 11.9

दिया है: व्यास $d = 35$ mm, अतः त्रिज्या $r = \frac{35}{2}$ mm।

व्यासों की संख्या = 5।

(i) कुल चाँदी के तार की लंबाई:

तार की लंबाई = वृत्त की परिधि + 5 व्यासों की लंबाई

$= \pi d + 5d = \left(\frac{22}{7} \times 35\right) + (5 \times 35)$

$= (22 \times 5) + 175 = 110 + 175 = 285$ mm

(ii) प्रत्येक त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल:

चूँकि वृत्त को 10 बराबर त्रिज्यखंडों में बाँटा गया है, प्रत्येक का कोण $\theta = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$ होगा।

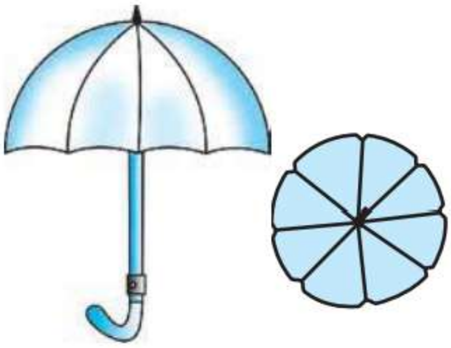
प्रत्येक त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल = $\frac{1}{10} \times \pi r^2$

$= \frac{1}{10} \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{35}{2}\right) \times \left(\frac{35}{2}\right)$

$= \frac{1}{10} \times \frac{22}{7} \times \frac{1225}{4} = \frac{1}{10} \times \frac{22 \times 175}{4} = \frac{1}{10} \times \frac{3850}{4} = \frac{385}{4}$ mm^2

अतः कुल तार की लंबाई 285 mm है और प्रत्येक त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल $\frac{385}{4}$ mm^2 है।

प्र 10. **एक छतरी में 8 ताने (ribs) हैं, जो बराबर दूरी पर लगे हुए हैं (देखिए आकृति 11.10)। छतरी को 45 cm त्रिज्या वाला एक सपाट वृत्त मानते हुए, इसकी दो क्रमागत तानों के बीच का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।**



आकृति 11.10

छतरी को एक वृत्त माना गया है जिसकी त्रिज्या $r = 45$ cm है।

वृत्त को 8 बराबर भागों में बाँटा गया है।

दो क्रमागत तानों के बीच का कोण $\theta = \frac{360°}{8} = 45°$ होगा।

दो क्रमागत तानों के बीच का क्षेत्रफल (त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल) = $\frac{\theta}{360°} \times \pi r^2$

$= \frac{45}{360} \times \frac{22}{7} \times (45)^2 = \frac{1}{8} \times \frac{22}{7} \times 2025$

$= \frac{1}{4} \times \frac{11}{7} \times 2025 = \frac{22275}{28}\ \text{cm}^2$

अतः दो तानों के बीच का क्षेत्रफल $\frac{22275}{28}\ \text{cm}^2$ है।

प्र 11. **किसी कार के दो वाइपर (wipers) हैं, परस्पर कभी आच्छादित (overlap) नहीं होते हैं। प्रत्येक वाइपर की पत्ती की लंबाई 25 cm है और $115°$ के कोण तक घूम कर सफाई कर सकता है। पत्तियों की प्रत्येक बुहार (sweep) के साथ जितना क्षेत्रफल साफ हो जाता है, वह ज्ञात कीजिए।**

प्रत्येक वाइपर की पत्ती की लंबाई, त्रिज्या $r = 25$ cm के बराबर है।

घूमने का कोण $\theta = 115°$।

एक वाइपर द्वारा साफ किया गया क्षेत्रफल = त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल = $\frac{115}{360} \times \pi r^2$

चूँकि 2 वाइपर हैं, इसलिए कुल साफ किया गया क्षेत्रफल = $2 \times \frac{115}{360} \times \frac{22}{7} \times (25)^2$

$= 2 \times \frac{23}{72} \times \frac{22}{7} \times 625 = \frac{23}{36} \times \frac{22}{7} \times 625 = \frac{23}{18} \times \frac{11}{7} \times 625$

$= \frac{23 \times 11 \times 625}{18 \times 7} = \frac{158125}{126}\ \text{cm}^2$

अतः पत्तियों की प्रत्येक बुहार से साफ किया गया कुल क्षेत्रफल $\frac{158125}{126}\ \text{cm}^2$ है।

प्र 12. जहाजों को समुद्र में जलस्तर के नीचे स्थित चट्टानों की चेतावनी देने के लिए, एक लाइट हाउस (light house) 80° कोण वाले एक त्रिज्यखंड में 16.5 km की दूरी तक लाल रंग का प्रकाश फैलाता है। समुद्र के उस भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसमें जहाजों को चेतावनी दी जा सके। ($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए)

प्रकाश फैलने की दूरी, त्रिज्यखंड की त्रिज्या $r = 16.5 \text{ km}$ है।

कोण $\theta = 80^{\circ}$।

उस भाग का क्षेत्रफल जहाँ प्रकाश फैलता है = $\frac{\theta}{360^{\circ}} \times \pi r^2$

$= \frac{80}{360} \times 3.14 \times (16.5)^2$

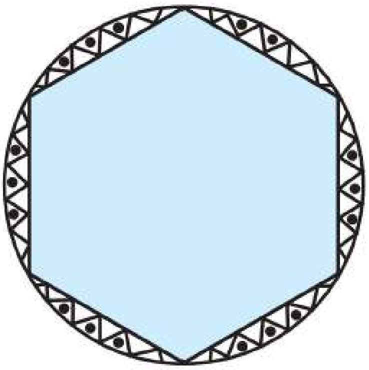
$= \frac{2}{9} \times 3.14 \times 272.25$

$= 2 \times 3.14 \times 30.25$

$= 6.28 \times 30.25 = 189.97 \text{ km}^2$

अतः उस भाग का क्षेत्रफल 189.97 km^2 है।

प्र 13. **एक गोल मेजपोश पर 6 समान डिजाइन बने हुए हैं (देखिए आकृति 11.11)। यदि मेजपोश की त्रिज्या 28 cm है, तो Rs 0.35 प्रति cm^2 की दर से इन डिजाइनों को बनाने की लागत ज्ञात कीजिए। ($\sqrt{3} = 1.7$ का प्रयोग कीजिए)**



आकृति 11.11

मेजपोश की त्रिज्या $r = 28$ cm।

चूँकि 6 समान डिजाइन हैं, इसलिए केंद्र पर प्रत्येक डिजाइन द्वारा अंतरित कोण $\theta = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$ होगा।

एक डिजाइन का क्षेत्रफल = एक वृत्तखंड (Segment) का क्षेत्रफल

= त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल - समबाहु △ का क्षेत्रफल

$= \frac{60}{360} \times \frac{22}{7} \times (28)^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} \times (28)^2$

$= \frac{1}{6} \times \frac{22}{7} \times 784 - \frac{1.7}{4} \times 784$

$= \frac{1}{6} \times 22 \times 112 - 1.7 \times 196$

$= \frac{2464}{6} - 333.2 = 410.66 - 333.2 = 77.46\ \mathrm{cm}^2$ (लगभग)

6 डिजाइनों का कुल क्षेत्रफल $= 6 \times \left(\frac{2464}{6} - 333.2\right) = 2464 - 1999.2 = 464.8\ \mathrm{cm}^2$

लागत = $0.35 \times 464.8 = \text{Rs } 162.68$

अतः डिजाइनों को बनाने की लागत 162.68 रुपये है।

प्र 14. **निम्नलिखित में सही उत्तर चुनिए:**

त्रिज्या R वाले वृत्त के उस त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल जिसका कोण p° है, निम्नलिखित है:

(A) $\frac{p}{180} \times 2\pi R$

(B) $\frac{p}{180} \times \pi R^2$

(C) $\frac{p}{360} \times 2\pi R$

(D) $\frac{p}{720} \times 2\pi R^2$

हम जानते हैं कि कोण θ और त्रिज्या r वाले त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल = $\frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2$ होता है।

यहाँ $\theta = p^\circ$ और $r = R$।

इसलिए क्षेत्रफल = $\frac{p}{360} \times \pi R^2$

विकल्प (D) को ध्यान से देखने पर: $\frac{p}{720} \times 2\pi R^2 = \frac{p\times 2}{360\times 2} \times \pi R^2 = \frac{p}{360} \times \pi R^2$

अतः सही उत्तर (D) $\frac{p}{720} \times 2\pi R^2$ है।