अध्याय 10: वृत्त

Class 10 Math Chapter 10 Solutions (Hindi Medium)

प्रश्नावली 10.1

प्र 1. **एक वृत्त की कितनी स्पर्श रेखाएँ हो सकती हैं?**

एक वृत्त की **अपरिमित रूप से अनेक (अनंत)** स्पर्श रेखाएँ हो सकती हैं।

कारण: वृत्त की परिधि पर अनंत बिंदु होते हैं और प्रत्येक बिंदु से वृत्त पर एक स्पर्श रेखा खींची जा सकती है।

प्र 2. **रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:**
(i) किसी वृत्त की स्पर्श रेखा उसे ______ बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करती है।
(ii) वृत्त को दो बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करने वाली रेखा को ______ कहते हैं.
(iii) एक वृत्त की ______ समांतर स्पर्श रेखाएँ हो सकती हैं।
(iv) वृत्त तथा उसकी स्पर्श रेखा के उभयनिष्ठ बिंदु को ______ कहते हैं।

(i) किसी वृत्त की स्पर्श रेखा उसे **एक** बिंदु पर प्रतिच्छेद करती है।

(ii) वृत्त को दो बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करने वाली रेखा को **छेदक रेखा (Secant)** कहते हैं।

(iii) एक वृत्त की **दो** समांतर स्पर्श रेखाएँ हो सकती हैं।

(iv) वृत्त तथा उसकी स्पर्श रेखा के उभयनिष्ठ बिंदु को **स्पर्श बिंदु (Point of contact)** कहते हैं।

प्र 3. **5 cm त्रिज्या वाले एक वृत्त के बिंदु P पर स्पर्श रेखा PQ केंद्र O से जाने वाली एक रेखा से बिंदु Q पर इस प्रकार मिलती है कि OQ = 12 cm है। PQ की लंबाई है:**
(A) 12 cm
(B) 13 cm
(C) 8.5 cm
(D) $\sqrt{119}$ cm

दिया है: वृत्त की त्रिज्या OP = 5 cm (यहाँ OP स्पर्श बिंदु P से केंद्र को मिलाने वाली रेखा है)।

केंद्र O से बिंदु Q की दूरी OQ = 12 cm।

हम जानते हैं कि स्पर्श बिंदु से होकर जाने वाली त्रिज्या, स्पर्श रेखा पर लंब होती है।

अतः $\angle OPQ = 90^\circ$।

समकोण $\triangle OPQ$ में, पाइथागोरस प्रमेय (Pythagoras theorem) से:

$OQ^2 = OP^2 + PQ^2$

$(12)^2 = (5)^2 + PQ^2$

$144 = 25 + PQ^2$

$PQ^2 = 144 - 25 = 119$

$PQ = \sqrt{119}\text{ cm}$

अतः सही उत्तर (D) $\sqrt{119}\text{ cm}$ है।

प्र 4. **एक वृत्त खींचिए और एक दी गई रेखा के समांतर दो ऐसी रेखाएँ खींचिए कि उनमें से एक स्पर्श रेखा हो तथा दूसरी छेदक रेखा हो।**

रचना (Construction):

1. किसी भी त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए जिसका केंद्र O हो।

2. वृत्त के बाहर कोई दी गई रेखा l खींचिए।

3. अब रेखा l पर केंद्र O से एक लंब (Perpendicular) खींचिए जो वृत्त को बिंदु P पर और रेखा l को M पर काटे।

4. बिंदु P पर रेखा l के समांतर एक रेखा m खींचिए। यह रेखा वृत्त को केवल एक बिंदु P पर छूती है, अतः यह **स्पर्श रेखा (Tangent)** है।

5. वृत्त के अंदर किसी भी बिंदु से रेखा l के समांतर एक रेखा n खींचिए। यह रेखा वृत्त को दो बिंदुओं पर काटती है, अतः यह **छेदक रेखा (Secant)** है।

इस प्रकार m और n दोनों दी गई रेखा l के समांतर हैं, जहाँ m स्पर्श रेखा है और n छेदक रेखा है।

प्रश्नावली 10.2

प्र 1. एक बिंदु Q से एक वृत्त पर स्पर्श रेखा की लंबाई 24 cm तथा Q की केंद्र से दूरी 25 cm है। वृत्त की त्रिज्या है:

(A) 7 cm

(B) 12 cm

(C) 15 cm

(D) 24.5 cm

माना वृत्त का केंद्र O है और स्पर्श बिंदु P है।

स्पर्श रेखा की लंबाई PQ = 24 cm।

केंद्र से बिंदु Q की दूरी OQ = 25 cm।

त्रिज्या OP, स्पर्श रेखा PQ पर लंब होती है (प्रमेय 10.1)। अतः $\angle OPQ = 90^\circ$।

समकोण $\triangle OPQ$ में पाइथागोरस प्रमेय से:

$OQ^2 = OP^2 + PQ^2$

$(25)^2 = OP^2 + (24)^2$

$625 = OP^2 + 576$

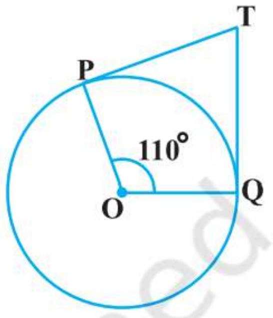
$OP^2 = 625 - 576 = 49$

$OP = \sqrt{49} = 7 \text{ cm}$

अतः सही उत्तर (A) 7 cm है।

प्र 2. **आकृति 10.11 में, यदि TP, TQ केंद्र O वाले किसी वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ इस प्रकार हैं कि $\angle POQ = 110^\circ$, तो $\angle PTQ$ बराबर है:**

(A) 60°
(B) 70°
(C) 80°
(D) 90°



आकृति 10.11

हम जानते हैं कि त्रिज्या और स्पर्श रेखा के बीच का कोण 90° होता है।

अतः $\angle OPT = 90^\circ$ और $\angle OQT = 90^\circ$।

चतुर्भुज POQT में चारों कोणों का योग 360° होता है:

$\angle POQ + \angle OPT + \angle OQT + \angle PTQ = 360^\circ$

$110^\circ + 90^\circ + 90^\circ + \angle PTQ = 360^\circ$

$290^\circ + \angle PTQ = 360^\circ$

$\angle PTQ = 360^\circ - 290^\circ = 70^\circ$

अतः सही उत्तर (B) 70° **है।**

प्र 3. **यदि एक बिंदु P से O केंद्र वाले किसी वृत्त पर PA, PB स्पर्श रेखाएँ परस्पर 80° के कोण पर झुकी हों, तो $\angle POA$ बराबर है:**

(A) 50°
(B) 60°
(C) 70°
(D) 80°

स्पर्श रेखाएँ PA और PB परस्पर 80° के कोण पर झुकी हैं, अतः $\angle APB = 80^\circ$।

त्रिज्या स्पर्श रेखा पर लंब होती है, अतः $\angle OAP = 90^\circ$ और $\angle OBP = 90^\circ$।

चतुर्भुज OAPB में: $\angle AOB + \angle OAP + \angle OBP + \angle APB = 360^\circ$

$\angle AOB + 90^\circ + 90^\circ + 80^\circ = 360^\circ$

$\angle AOB + 260^\circ = 360^\circ \Rightarrow \angle AOB = 100^\circ$

अब, $\triangle OAP$ और $\triangle OBP$ में, केंद्र से बाह्य बिंदु को मिलाने वाली रेखा स्पर्श रेखाओं के बीच के कोण को समद्विभाजित करती है।

अतः $\angle POA = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{100^\circ}{2} = 50^\circ$।

अतः सही उत्तर (A) 50° **है।**

प्र 4. **सिद्ध कीजिए कि किसी वृत्त के किसी व्यास के सिरों पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ समांतर होती हैं।**

प्रमाण (Proof):

माना O केंद्र वाला एक वृत्त है और AB इसका एक व्यास (diameter) है।

बिंदु A पर एक स्पर्श रेखा PQ खींची गई है और बिंदु B पर एक स्पर्श रेखा RS खींची गई है।

हम जानते हैं कि वृत्त के किसी बिंदु पर स्पर्श रेखा, स्पर्श बिंदु से होकर जाने वाली त्रिज्या पर लंब होती है (प्रमेय 10.1)।

इसलिए, $OA \perp PQ$ और $OB \perp RS$।

अतः $\angle OAP = 90^\circ$ और $\angle OBS = 90^\circ$।

चूँकि AB एक सीधी रेखा (व्यास) है, $\angle OAP$ और $\angle OBS$ एकांतर अंतः कोण (alternate interior angles) बनाते हैं।

यहाँ, $\angle OAP = \angle OBS = 90^\circ$।

चूँकि एकांतर अंतः कोण बराबर हैं, इसलिए रेखा PQ और RS समांतर (parallel) होंगी ($PQ \parallel RS$)।

इति सिद्धम् (Hence Proved)।

प्र 5. **सिद्ध कीजिए कि स्पर्श बिंदु से स्पर्श रेखा पर खींचा गया लंब वृत्त के केंद्र से होकर जाता है।**

प्रमाण (Proof by Contradiction):

माना O केंद्र वाला एक वृत्त है और AB बिंदु P पर इसकी एक स्पर्श रेखा है।

हमें सिद्ध करना है कि P पर AB का लंब केंद्र O से होकर जाता है।

मान लीजिए कि P पर AB का लंब O से नहीं, बल्कि किसी अन्य बिंदु O' से होकर जाता है।

इसलिए, $\angle O'PB = 90^\circ$ ... (1) (हमारी मान्यता के अनुसार)

परंतु, प्रमेय 10.1 के अनुसार, केंद्र से स्पर्श बिंदु को मिलाने वाली त्रिज्या, स्पर्श रेखा पर लंब होती है।

इसलिए, $OP \perp AB$, जिसका अर्थ है कि $\angle OPB = 90^\circ$ ... (2)

समीकरण (1) और (2) से हमें मिलता है: $\angle O'PB = \angle OPB = 90^\circ$

यह तभी संभव है जब रेखा O'P और OP एक ही रेखा हों (अर्थात संपाती या coincident हों)।

अतः हमारी यह मान्यता गलत है कि लंब किसी अन्य बिंदु O' से होकर जाता है।

निष्कर्ष: स्पर्श बिंदु पर खींचा गया लंब वृत्त के केंद्र से ही होकर जाता है।

प्र 6. **एक बिंदु A से, जो एक वृत्त के केंद्र से 5 cm दूरी पर है, वृत्त पर स्पर्श रेखा की लंबाई 4 cm है। वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।**

माना वृत्त का केंद्र O है और स्पर्श बिंदु B है।

केंद्र से बिंदु A की दूरी OA = 5 cm।

स्पर्श रेखा की लंबाई AB = 4 cm।

हम जानते हैं कि त्रिज्या स्पर्श रेखा पर लंब होती है ($OB \perp AB$)। अतः $\angle OBA = 90°$।

समकोण $\triangle OBA$ में पाइथागोरस प्रमेय से:

$OA^2 = OB^2 + AB^2$

$(5)^2 = OB^2 + (4)^2$

$25 = OB^2 + 16 \Rightarrow OB^2 = 25 - 16 = 9$

$OB = \sqrt{9} = 3 \text{ cm}$

अतः वृत्त की त्रिज्या 3 cm है।

प्र 7. **दो संकेंद्री वृत्तों की त्रिज्याएँ 5 cm तथा 3 cm हैं। बड़े वृत्त की उस जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए जो छोटे वृत्त को स्पर्श करती हो।**

माना दोनों संकेंद्री (concentric) वृत्तों का केंद्र O है।

बड़े वृत्त की त्रिज्या OA = 5 cm और छोटे वृत्त की त्रिज्या OP = 3 cm है।

माना AB बड़े वृत्त की जीवा है जो छोटे वृत्त को बिंदु P पर स्पर्श करती है।

चूँकि AB छोटे वृत्त की स्पर्श रेखा है और OP त्रिज्या है, अतः $OP \perp AB$ (प्रमेय 10.1)।

समकोण $\triangle OPA$ में पाइथागोरस प्रमेय से:

$OA^2 = OP^2 + AP^2$

$(5)^2 = (3)^2 + AP^2$

$25 = 9 + AP^2 \Rightarrow AP^2 = 25 - 9 = 16$

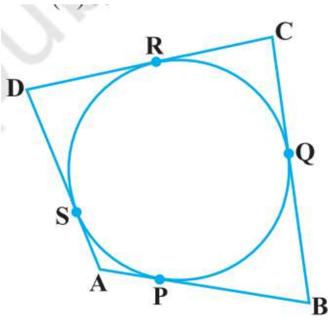
$AP = \sqrt{16} = 4 \text{ cm}$

हम जानते हैं कि केंद्र से जीवा पर डाला गया लंब जीवा को समद्विभाजित (bisect) करता है।

अतः, जीवा AB की कुल लंबाई = $2 \times AP = 2 \times 4 = 8 \text{ cm}$।

अतः जीवा की लंबाई 8 cm है।

प्र 8. **एक वृत्त के परिगत एक चतुर्भुज ABCD खींचा गया है (देखिए आकृति 10.12)। सिद्ध कीजिए:**
$AB + CD = AD + BC$



आकृति 10.12

प्रमाण:

चूँकि वृत्त के बाह्य बिंदु से खींची गई स्पर्श रेखाओं की लंबाइयाँ बराबर होती हैं (प्रमेय 10.2), इसलिए:

बिंदु A से स्पर्श रेखाएँ: $AP = AS$ ... (1)

बिंदु B से स्पर्श रेखाएँ: $BP = BQ$ ... (2)

बिंदु C से स्पर्श रेखाएँ: $CR = CQ$ ... (3)

बिंदु D से स्पर्श रेखाएँ: $DR = DS$ ... (4)

समीकरण (1), (2), (3) और (4) को जोड़ने पर:

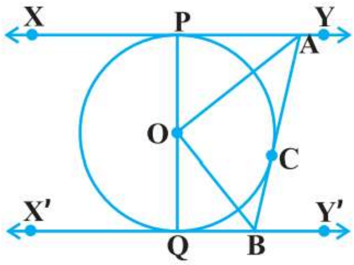
$(AP + BP) + (CR + DR) = (AS + DS) + (BQ + CQ)$

चूँकि $AP + BP = AB$, $CR + DR = CD$, $AS + DS = AD$, और $BQ + CQ = BC$ है,

इसलिए, $AB + CD = AD + BC$

इति सिद्धम्।

प्र 9. **आकृति 10.13 में, XY तथा X'Y', O केंद्र वाले किसी वृत्त पर दो समांतर स्पर्श रेखाएँ हैं और स्पर्श बिंदु C पर स्पर्श रेखा AB, XY को A तथा X'Y' को B पर प्रतिच्छेद करती है। सिद्ध कीजिए कि $\angle AOB = 90^\circ$ है।**



आकृति 10.13

प्रमाण:

रचना: OC को मिलाएँ।

अब, $\triangle OPA$ और $\triangle OCA$ में:

$OP = OC$ (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ)

$OA = OA$ (उभयनिष्ठ/Common)

$AP = AC$ (बाह्य बिंदु A से खींची गई स्पर्श रेखाएँ)

अतः, SSS सर्वांगसमता कसौटी से: $\triangle OPA \cong \triangle OCA$

इसलिए, $\angle POA = \angle COA$ ... (1)

इसी प्रकार, $\triangle OQB$ और $\triangle OCB$ में:

$\triangle OQB \cong \triangle OCB$

इसलिए, $\angle QOB = \angle COB$ ... (2)

चूँकि POQ एक व्यास है और एक सीधी रेखा है, इसलिए:

$\angle POA + \angle COA + \angle COB + \angle QOB = 180^\circ$

समीकरण (1) और (2) से मान रखने पर:

$2\angle COA + 2\angle COB = 180^\circ$

$2(\angle COA + \angle COB) = 180^\circ$

$\angle COA + \angle COB = 90^\circ$

चूँकि $\angle COA + \angle COB = \angle AOB$,

अतः, $\angle AOB = 90^\circ$

इति सिद्धम्।

प्र 10. सिद्ध कीजिए कि किसी बाह्य बिंदु से किसी वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण स्पर्श बिंदुओं को मिलाने वाले रेखाखंड द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण का संपूरक होता है।

प्रमाण:

माना O केंद्र वाला एक वृत्त है और बाह्य बिंदु P से दो स्पर्श रेखाएँ PA और PB खींची गई हैं।

A और B स्पर्श बिंदु हैं। हमें सिद्ध करना है कि $\angle APB + \angle AOB = 180^\circ$।

हम जानते हैं कि त्रिज्या स्पर्श रेखा पर लंब होती है, अतः $\angle OAP = 90^\circ$ और $\angle OBP = 90^\circ$।

चतुर्भुज OAPB में, चारों कोणों का योग 360° होता है:

$\angle OAP + \angle OBP + \angle APB + \angle AOB = 360^\circ$

$90^\circ + 90^\circ + \angle APB + \angle AOB = 360^\circ$

$180^\circ + \angle APB + \angle AOB = 360^\circ$

$\angle APB + \angle AOB = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$

चूँकि इन दोनों कोणों का योग 180° है, इसलिए ये एक-दूसरे के संपूरक (supplementary) हैं।

इति सिद्धम्।

प्र 11. सिद्ध कीजिए कि किसी वृत्त के परिगत समांतर चतुर्भुज समचतुर्भुज होता है।

प्रमाण:

माना ABCD एक समांतर चतुर्भुज (Parallelogram) है जो एक वृत्त के परिगत खींचा गया है और वृत्त को P, Q, R, S पर स्पर्श करता है।

चूँकि ABCD एक समांतर चतुर्भुज है, इसलिए आमने-सामने की भुजाएँ बराबर होती हैं:

$AB = CD$ और $AD = BC$ ... (1)

हम जानते हैं कि बाह्य बिंदु से खींची गई स्पर्श रेखाएँ बराबर होती हैं:

$AP = AS$

$BP = BQ$

$CR = CQ$

$DR = DS$

इन चारों को जोड़ने पर (प्रश्न 8 की तरह):

$(AP + BP) + (CR + DR) = (AS + DS) + (BQ + CQ)$

$AB + CD = AD + BC$ ... (2)

समीकरण (1) से CD की जगह AB और BC की जगह AD रखने पर:

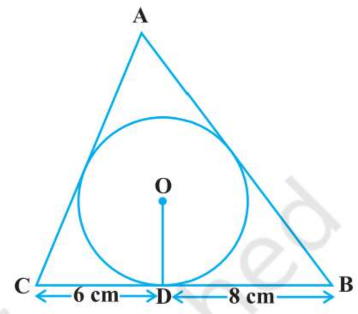
$AB + AB = AD + AD$

$2AB = 2AD \Rightarrow AB = AD$

अब चूँकि $AB = CD$ और $AB = AD$, इसलिए चारों भुजाएँ बराबर हैं: $AB = BC = CD = DA$।

अतः ABCD एक समचतुर्भुज (Rhombus) है। इति सिद्धम्।

प्र 12. **4 cm त्रिज्या वाले एक वृत्त के परिगत एक त्रिभुज ABC इस प्रकार खींचा गया है कि रेखाखंड BD और DC (जिनमें स्पर्श बिंदु D द्वारा BC विभाजित है) की लंबाइयाँ क्रमशः 8 cm और 6 cm हैं (देखिए आकृति 10.14)। भुजाएँ AB और AC ज्ञात कीजिए।**



आकृति 10.14

माना वृत्त $\triangle ABC$ को बिंदु D, E और F पर स्पर्श करता है।

वृत्त की त्रिज्या $OD = OE = OF = 4 \text{ cm}$।

बाह्य बिंदु से स्पर्श रेखाएँ बराबर होती हैं:

$CD = CE = 6 \text{ cm}$

$BD = BF = 8 \text{ cm}$

माना $AF = AE = x \text{ cm}$।

भुजाएँ: $a = BC = 6 + 8 = 14 \text{ cm}$, $b = AC = 6 + x \text{ cm}$, $c = AB = 8 + x \text{ cm}$।

अर्धपरिमाप $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{14+(6+x)+(8+x)}{2} = \frac{28+2x}{2} = 14 + x$

हीरोन के सूत्र (Heron's Formula) से $\triangle ABC$ का क्षेत्रफल:

$\text{Area} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$\text{Area} = \sqrt{(14+x)(14+x-14)(14+x-6-x)(14+x-8-x)}$

$\text{Area} = \sqrt{(14+x)(x)(8)(6)} = \sqrt{48x(14+x)}$ ... (1)

वैकल्पिक रूप से, $\triangle ABC$ का क्षेत्रफल 3 छोटे त्रिभुजों के क्षेत्रफल के योग के बराबर है:

$\text{Area}(\triangle ABC) = \text{Area}(\triangle OBC) + \text{Area}(\triangle OCA) + \text{Area}(\triangle OAB)$

$\text{Area} = \frac{1}{2} \times BC \times OD + \frac{1}{2} \times AC \times OE + \frac{1}{2} \times AB \times OF$

चूँकि $OD = OE = OF = 4$:

$\text{Area} = \frac{1}{2} \times 4 \times (BC + AC + AB) = 2 \times (14 + 6 + x + 8 + x) = 2(28 + 2x) = 56 + 4x = 4(14 + x$
... (2)

समीकरण (1) और (2) को बराबर करने पर:

$\sqrt{48x(14+x)} = 4(14+x)$

दोनों तरफ वर्ग (square) करने पर:

$48x(14+x) = 16(14+x)^2$

$3x = 14 + x$ (चूँकि $14 + x \neq 0$)

$2x = 14 \Rightarrow x = 7 \text{ cm}$

अतः भुजाएँ:

$AB = 8 + x = 8 + 7 = 15 \text{ cm}$

$AC = 6 + x = 6 + 7 = 13 \text{ cm}$

प्र 13. सिद्ध कीजिए कि वृत्त के परिगत बनी चतुर्भुज की आमने-सामने की भुजाएँ केंद्र पर संपूरक कोण अंतरित करती हैं।

प्रमाण:

माना O केंद्र वाले वृत्त के परिगत एक चतुर्भुज ABCD है जो वृत्त को P, Q, R, S पर स्पर्श करता है।

केंद्र O को P, Q, R, S और A, B, C, D से मिलाएँ।

इस प्रकार केंद्र पर 8 कोण बनेंगे: $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6, \angle 7, \angle 8$।

हम जानते हैं कि किसी बाह्य बिंदु से खींची गई स्पर्श रेखाएँ केंद्र पर समान कोण अंतरित करती हैं।

इसलिए: $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, $\angle 5 = \angle 6$, और $\angle 7 = \angle 8$

चूँकि वृत्त के केंद्र पर सभी कोणों का योग 360° होता है:

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 + \angle 7 + \angle 8 = 360^\circ$

समान कोणों को प्रतिस्थापित करने पर:

$2\angle 1 + 2\angle 4 + 2\angle 5 + 2\angle 8 = 360^\circ \Rightarrow \angle 1 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 8 = 180^\circ$

और $2\angle 2 + 2\angle 3 + 2\angle 6 + 2\angle 7 = 360^\circ \Rightarrow \angle 2 + \angle 3 + \angle 6 + \angle 7 = 180^\circ$

यहाँ $\angle AOB = \angle 1 + \angle 8$ और $\angle COD = \angle 4 + \angle 5$,

इसलिए $\angle AOB + \angle COD = (\angle 1 + \angle 8) + (\angle 4 + \angle 5) = 180^\circ$।

इसी प्रकार $\angle BOC + \angle AOD = 180^\circ$।

चूँकि आमने-सामने की भुजाओं द्वारा बनाए गए कोणों का योग 180° है, इसलिए वे संपूरक हैं।

इति सिद्धम्।