अध्याय 1: वास्तविक संख्याएँ - महत्वपूर्ण प्रश्नोत्तर

प्रश्नावली 1.1 (Exercise 1.1)

प्रश्न 1: निम्नलिखित संख्याओं को अभाज्य गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए:

1. 140: $140 = 2 \times 70 = 2 \times 2 \times 35 = 2 \times 2 \times 5 \times 7 = \mathbf{2^2 \times 5 \times 7}$
2. 156: $156 = 2 \times 78 = 2 \times 2 \times 39 = 2 \times 2 \times 3 \times 13 = \mathbf{2^2 \times 3 \times 13}$
3. 3825: $3825 = 3 \times 1275 = 3 \times 3 \times 425 = 3 \times 3 \times 5 \times 85 = 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 17 = \mathbf{3^2 \times 5^2 \times 17}$
4. 5005: $5005 = 5 \times 1001 = 5 \times 7 \times 143 = 5 \times 7 \times 11 \times 13 = \mathbf{5 \times 7 \times 11 \times 13}$
5. 7429: $7429 = \mathbf{17 \times 19 \times 23}$

प्रश्न 2: पूर्णांकों के निम्नलिखित युग्मों के HCF और LCM ज्ञात कीजिए तथा इसकी जाँच कीजिए कि 'दो संख्याओं का गुणनफल = HCF × LCM' है।

1. 26 और 91:
   - $26 = 2 \times 13$
   - $91 = 7 \times 13$
   - HCF = 13; LCM = $2 \times 7 \times 13 = 182$
   - जाँच: $26 \times 91 = 2366$; $13 \times 182 = 2366$. (सत्य है)
2. 510 और 92:
   - $510 = 2 \times 3 \times 5 \times 17$
   - $92 = 2^2 \times 23$
   - HCF = 2; LCM = $2^2 \times 3 \times 5 \times 17 \times 23 = 23460$
   - जाँच: $510 \times 92 = 46920$; $2 \times 23460 = 46920$. (सत्य है)
3. 336 और 54:
   - $336 = 2^4 \times 3 \times 7$
   - $54 = 2 \times 3^3$
   - HCF = $2 \times 3 = 6$; LCM = $2^4 \times 3^3 \times 7 = 3024$
   - जाँच: $336 \times 54 = 18144$; $6 \times 3024 = 18144$. (सत्य है)

प्रश्न 3: अभाज्य गुणनखंडन विधि द्वारा निम्नलिखित पूर्णांकों के HCF और LCM ज्ञात कीजिए:

1. 12, 15 और 21: HCF = 3; LCM = 420
2. 17, 23 और 29: HCF = 1; LCM = 11339
3. 8, 9 और 25: HCF = 1; LCM = 1800

प्रश्न 4: HCF(306, 657) = 9 दिया है। LCM(306, 657) ज्ञात कीजिए।

- सूत्र: $\text{LCM} = \frac{\text{संख्याओं का गुणनफल}}{\text{HCF}}$
- $\text{LCM} = \frac{306\times657}{9} = 34 \times 657 = \mathbf{22338}$

प्रश्न 5: जाँच कीजिए कि क्या किसी प्राकृतिक संख्या n के लिए, संख्या 6^n अंक 0 पर समाप्त हो सकती है।

- उत्तर: नहीं। किसी संख्या के 0 पर समाप्त होने के लिए उसके अभाज्य गुणनखंड में 2 और 5 दोनों का होना अनिवार्य है। $6^n = (2\times3)^n$, यहाँ 5 नहीं है, अतः यह कभी 0 पर समाप्त नहीं होगी।

प्रशानावली 1.2 (Exercise 1.2)

प्रश्न 1: सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

- हल: माना $\sqrt{5} = \frac{a}{b}$ एक परिमेय संख्या है जहाँ a, b सह-अभाज्य हैं।
- $5 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 5b^2$. अतः a^2, 5 से विभाजित है, तो a भी 5 से विभाजित होगा।
- माना $a = 5c$, तब $(5c)^2 = 5b^2 \Rightarrow 25c^2 = 5b^2 \Rightarrow b^2 = 5c^2$.
- अतः b भी 5 से विभाजित है। चूँकि a और b दोनों का उभयनिष्ठ गुणनखंड 5 है, यह हमारी कल्पना का विरोधाभास है। अतः $\sqrt{5}$ अपरिमेय है।

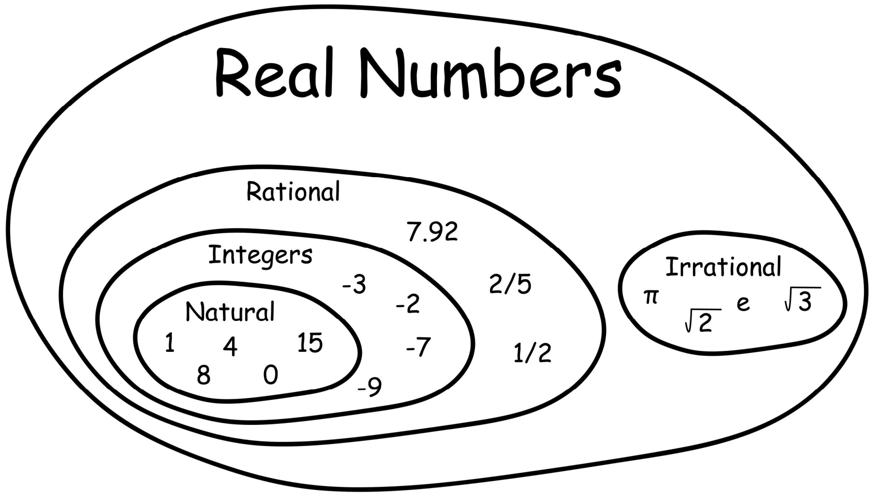
प्रश्न 2: सिद्ध कीजिए कि $3 + 2\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

- हल: माना $3 + 2\sqrt{5} = \frac{a}{b}$ (परिमेय)
- $2\sqrt{5} = \frac{a}{b} - 3 \Rightarrow \sqrt{5} = \frac{a-3b}{2b}$
- चूँकि a, b पूर्णांक हैं, $\frac{a-3b}{2b}$ एक परिमेय संख्या है। लेकिन हम जानते हैं कि $\sqrt{5}$ अपरिमेय है। यह विरोधाभास हमारी गलत कल्पना के कारण हुआ है। अतः $3 + 2\sqrt{5}$ अपरिमेय है।

प्रश्न 3: सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित संख्याएँ अपरिमेय हैं:

1. $1/\sqrt{2}$: (उलट कर $\sqrt{2}$ के रूप में सिद्ध करें)
2. $7\sqrt{5}$: $\sqrt{5} = \frac{a}{7b}$. $\sqrt{5}$ अपरिमेय है, अतः $7\sqrt{5}$ भी अपरिमेय होगी।
3. $6 + \sqrt{2}$: $\sqrt{2} = \frac{a}{b} - 6$. $\sqrt{2}$ अपरिमेय है, अतः $6 + \sqrt{2}$ भी अपरिमेय होगी।

Schorbit



पुराने बोर्ड परीक्षाओं के प्रश्न और कुछ अन्य महत्वपूर्ण संभावित प्रश्न

भाग 1: अति लघु उत्तरीय प्रश्न (1 अंक)

प्रश्न 1: संख्या 156 को अभाज्य गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए। [CBSE 2020, 2023]

- **उत्तर:** $156 = 2 \times 78 = 2 \times 2 \times 39 = 2 \times 2 \times 3 \times 13 = \mathbf{2^2 \times 3 \times 13}$

प्रश्न 2: यदि दो संख्याओं का HCF 9 है और उनका गुणनफल 3060 है, तो LCM ज्ञात कीजिए। [CBSE 2019]

- **उत्तर:** सूत्र: $\text{HCF} \times \text{LCM} =$ संख्याओं का गुणनफल
- $9 \times \text{LCM} = 3060 \Rightarrow \text{LCM} = \frac{3060}{9} = \mathbf{340}$

प्रश्न 3: क्या संख्या 4^n कभी अंक 0 पर समाप्त हो सकती है? कारण दीजिए। [CBSE 2018, 2022]

- **उत्तर:** नहीं। किसी संख्या के 0 पर समाप्त होने के लिए उसके अभाज्य गुणनखंडन में 2 और 5 दोनों का होना आवश्यक है। $4^n = (2 \times 2)^n$ में केवल अभाज्य गुणनखंड 2 है, 5 नहीं।

प्रश्न 4: अभाज्य संख्या और भाज्य संख्या में क्या अंतर है? [नया संभावित प्रश्न]

- **उत्तर:** अभाज्य संख्या के केवल दो गुणनखंड (1 और स्वयं) होते हैं, जबकि भाज्य संख्या के दो से अधिक गुणनखंड होते हैं।

भाग 2: लघु उत्तरीय प्रश्न (2-3 अंक)

प्रश्न 5: अभाज्य गुणनखंडन विधि द्वारा 96 और 404 का HCF और LCM ज्ञात कीजिए। [CBSE 2020, RBSE 2022]

- **उत्तर:**
  - $96 = 2^5 \times 3$
  - $404 = 2^2 \times 101$

- **HCF:** $2^2 = \mathbf{4}$
- **LCM:** $2^5 \times 3 \times 101 = 32 \times 3 \times 101 = \mathbf{9696}$

प्रश्न 6: व्याख्या कीजिए कि $\mathbf{7 \times 11 \times 13 + 13}$ और $\mathbf{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5}$ भाज्य संख्याएँ क्यों हैं? [CBSE 2023, NCERT]

- **उत्तर:** पहली संख्या: $13(7 \times 11 + 1) = 13 \times 78$। दूसरी संख्या: $5(7 \times 6 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 1) = 5 \times 1009$। चूँकि दोनों संख्याओं के दो से अधिक गुणनखंड हैं, इसलिए ये भाज्य संख्याएँ हैं।

प्रश्न 7: सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है। [CBSE 2016, 2021, RBSE 2024]

- **युक्ति:** इसे 'विरोधाभास विधि' से सिद्ध किया जाता है। परीक्षा के लिए यह **सबसे महत्वपूर्ण** प्रश्न है।

प्रश्न 8: वह सबसे बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 70 और 125 को विभाजित करने पर क्रमशः शेषफल 5 और 8 प्राप्त हों। [संभावित प्रश्न]

- **उत्तर:** संख्याएँ होंगी: $(70 - 5) =$ और$(125 - 8) = 11$।
- अब 65 और 117 का HCF निकालें:
  - $65 = 5 \times 13$
  - $117 = 3^2 \times 13$
  - **HCF = 13**। अतः वह संख्या **13** है।

भाग 3: दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (4-5 अंक)

प्रश्न 9: सिद्ध कीजिए कि $5 - \sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है। [CBSE 2018, 2022, RBSE 2023]

- **उत्तर:** माना $5 - \sqrt{3} = \frac{a}{b}$ एक परिमेय संख्या है।
  - $5 - \frac{a}{b} = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{5b-a}{b} = \sqrt{3}$
  - चूँकि a और b पूर्णांक हैं, इसलिए $\frac{5b-a}{b}$ परिमेय है, परंतु $\sqrt{3}$ अपरिमेय है। एक परिमेय संख्या कभी अपरिमेय के बराबर नहीं हो सकती। अतः $5 - \sqrt{3}$ अपरिमेय है।

प्रश्न 10: वृत्ताकार पथ वाला प्रश्न (सोनिया और रवि): [CBSE 2017, 2019]

- **प्रश्न:** सोनिया को एक चक्कर लगाने में 18 मिनट और रवि को 12 मिनट लगते हैं। वे दोबारा कब मिलेंगे?
- **उत्तर:** हमें 18 और 12 का **LCM** ज्ञात करना होगा।
  - $18 = 2 \times 3^2$
  - $12 = 2^2 \times 3$
  - **LCM** $= 2^2 \times 3^2 = 4 \times 9 = \mathbf{36}$। वे **36 मिनट** बाद दोबारा मिलेंगे।

प्रश्न 11: दर्शाइए कि किसी भी धनात्मक विषम पूर्णांक का रूप $6q + 1$ या $6q + 3$ या $6q + 5$ होता है। [NCERT]

- **उत्तर:** यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका ($a = bq + r$) का उपयोग करके, जहाँ $b = 6$ और $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ हो सकता है।

भविष्य के लिए महत्वपूर्ण संभावित प्रश्न

भाग 1: वस्तुनिष्ठ प्रश्न (MCQs/1 अंक)

प्रश्न 1: यदि दो धनात्मक पूर्णांक p और q को $p = ab^2$ और $q = a^3b$ के रूप में व्यक्त किया जाए (जहाँ a, b अभाज्य संख्याएँ हैं), तो $\mathrm{LCM}(p, q)$ क्या होगा?

- **उत्तर:** $\mathbf{a^3b^2}$ (LCM में प्रत्येक अभाज्य गुणनखंड की सबसे बड़ी घात ली जाती है)।

प्रश्न 2: वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जो 1 से 10 तक की सभी संख्याओं (दोनों सम्मिलित) से विभाज्य हो।

- **उत्तर:** $\mathbf{2520}$ (यह 1 से 10 तक की सभी संख्याओं का LCM है)।

प्रश्न 3: $\mathrm{HCF}(a, b) \times \mathrm{LCM}(a, b)$ का मान क्या होता है?

- **उत्तर:** $a \times b$ (दो संख्याओं का गुणनफल)।

भाग 2: लघु उत्तरीय प्रश्न (2-3 अंक)

प्रश्न 4: सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{p}$ एक अपरिमेय संख्या है, जहाँ p एक अभाज्य संख्या है।

- **महत्व:** यह प्रश्न $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ या $\sqrt{7}$ के रूप में बदला जा सकता है। इसे 'विरोधाभास विधि' से हल करने का अभ्यास अवश्य करें।

प्रश्न 5: बिना लंबी विभाजन प्रक्रिया किए बताइए कि $\frac{13}{3125}$ का दशमलव प्रसार शांत है या अशांत आवर्ती।

- **उत्तर:** हर का गुणनखंड करने पर: $3125 = 5^5$। चूँकि हर $2^n \times 5^m$ के रूप का है (यहाँ n=0, m=5), इसलिए इसका दशमलव प्रसार **शांत** होगा।

प्रश्न 6: अभाज्य गुणनखंडन विधि द्वारा 12, 15 और 21 का HCF और LCM ज्ञात कीजिए।

- **उत्तर:** * $12 = 2^2 \times 3$
    - $15 = 3 \times 5$
    - $21 = 3 \times 7$
    - **HCF** = 3; **LCM** = $2^2 \times 3 \times 5 \times 7 = \mathbf{420}$

प्रश्न 7: जाँच कीजिए कि क्या किसी प्राकृतिक संख्या n के लिए, संख्या 12^n अंक 0 या 5 पर समाप्त हो सकती है?

- **उत्तर:** नहीं। $12^n = (2^2 \times 3)^n$ । इसके गुणनखंड में 5 नहीं है, इसलिए यह न तो 0 पर समाप्त होगी और न ही 5 पर।

भाग 3: दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (4-5 अंक)

प्रश्न 8: सिद्ध कीजिए कि $3 + 5\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है, यह दिया गया है कि $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हल:

चरण 1: विपरीत मानना

माना कि $3 + 5\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है।

यदि यह परिमेय है, तो हम इसे $\frac{a}{b}$ के रूप में लिख सकते हैं, जहाँ a और b दो सह-अभाज्य (co-prime) पूर्णांक हैं और $b \neq 0$ है।

अतः,

$$3 + 5\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

चरण 2: समीकरण को व्यवस्थित करना

अब हम $\sqrt{2}$ को समीकरण के एक तरफ अकेला करने की कोशिश करेंगे:

$$5\sqrt{2} = \frac{a}{b} - 3$$

$5\sqrt{2} = \frac{a-3b}{b}$ (लघुत्तम समापवर्त्य लेने पर)

$$\sqrt{2} = \frac{a-3b}{5b}$$

चरण 3: तर्क और निष्कर्ष

चूँकि a, b, 3 और 5 सभी पूर्णांक (integers) हैं, इसलिए दाहिना पक्ष $\frac{a-3b}{5b}$ एक परिमेय संख्या होगी।

यदि दाहिना पक्ष परिमेय है, तो बायाँ पक्ष $(\sqrt{2})$ भी एक परिमेय संख्या होनी चाहिए।

चरण 4: विरोधाभास

परंतु, हमें प्रश्न में दिया गया है कि $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

यह तथ्य हमारे प्राप्त निष्कर्ष $\sqrt{2}$ परिमेय है) का विरोधाभास करता है। यह विरोधाभास हमारी इस गलत कल्पना के कारण हुआ है कि $3 + 5\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है।

अतः, यह सिद्ध होता है कि $3 + 5\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

इति सिद्धम्।

प्रश्न 9: किसी खेल के मैदान के चारों ओर एक वृत्ताकार पथ है। तीन धावक क्रमशः 20, 30 और 45 मिनट में एक चक्कर पूरा करते हैं। यदि वे एक साथ शुरू करें, तो वे कितने समय बाद दोबारा शुरुआती बिंदु पर मिलेंगे?

- **उत्तर:** यहाँ 20, 30 और 45 का **LCM** निकालना होगा।
    - $20 = 2^2 \times 5$
    - $30 = 2 \times 3 \times 5$
    - $45 = 3^2 \times 5$
    - **LCM** = $2^2 \times 3^2 \times 5 = 4 \times 9 \times 5 = \mathbf{180}$ मिनट (यानी 3 घंटे)।

प्रश्न 10: अंकगणित की आधारभूत प्रमेय का कथन लिखिए और इसका उपयोग करते हुए 504 और 980 का HCF ज्ञात कीजिए।

- **उत्तर:** कथन: "प्रत्येक भाज्य संख्या को अभाज्य संख्याओं के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।"
    - $504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$
    - $980 = 2^2 \times 5 \times 7^2$
    - **HCF** = $2^2 \times 7 = \mathbf{28}$।

महत्वपूर्ण उदाहरण (हल सहित)

उदाहरण 1: संख्याओं 4^n पर विचार कीजिए, जहाँ n एक प्राकृतिक संख्या है। जाँच कीजिए कि क्या n का कोई ऐसा मान है, जिसके लिए 4^n अंक शून्य (0) पर समाप्त होता है।

- **हल:** यदि किसी n के लिए संख्या 4^n शून्य पर समाप्त होगी, तो वह 5 से विभाज्य होगी। इसका अर्थ है कि 4^n के अभाज्य गुणनखंडन में अभाज्य संख्या 5 आनी चाहिए।
- परंतु, $4^n = (2^2)^n = 2^{2n}$ है।
- यहाँ 4^n के अभाज्य गुणनखंडन में केवल अभाज्य संख्या 2 ही आ सकती है।
- अंकगणित की आधारभूत प्रमेय की अद्वितीयता हमें यह सुनिश्चित करती है कि 4^n के गुणनखंडन में 2 के अतिरिक्त और कोई अभाज्य गुणनखंड नहीं है।
- अतः, ऐसी कोई प्राकृतिक संख्या n नहीं है जिसके लिए 4^n अंक 0 पर समाप्त हो।

उदाहरण 2: अभाज्य गुणनखंडन विधि द्वारा 6 और 20 के HCF और LCM ज्ञात कीजिए।

- **हल:**
    - $6 = 2^1 \times 3^1$
    - $20 = 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5^1$
    - **HCF(6, 20):** उभयनिष्ठ अभाज्य गुणनखंडों की सबसे छोटी घात का गुणनफल $= 2^1 = \mathbf{2}$

- **LCM(6, 20):** संबद्ध अभाज्य गुणनखंडों की सबसे बड़ी घातों का गुणनफल = $2^2 \times 3^1 \times 5^1 = 4 \times 3 \times 5 = \mathbf{60}$

उदाहरण 3: अभाज्य गुणनखंडन विधि द्वारा 96 और 404 का HCF ज्ञात कीजिए और फिर इनका LCM ज्ञात कीजिए।

- **हल:**
  - $96 = 2^5 \times 3$
  - $404 = 2^2 \times 101$
  - **HCF(96, 404)** $= 2^2 = \mathbf{4}$
  - हम जानते हैं कि: $\text{HCF} \times \text{LCM} =$ दो संख्याओं का गुणनफल
  - $4 \times \text{LCM} = 96 \times 404$
  - $\text{LCM} = \frac{96 \times 404}{4} = 96 \times 101 = \mathbf{9696}$

उदाहरण 4: संख्या 6, 72 और 120 का अभाज्य गुणनखंडन विधि द्वारा HCF और LCM ज्ञात कीजिए।

- **हल:**
  - $6 = 2^1 \times 3^1$
  - $72 = 2^3 \times 3^2$
  - $120 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1$
  - **HCF(6, 72, 120)** $= 2^1 \times 3^1 = \mathbf{6}$ (न्यूनतम घातें)
  - **LCM(6, 72, 120)** $= 2^3 \times 3^2 \times 5^1 = 8 \times 9 \times 5 = \mathbf{360}$ (अधिकतम घातें)

उदाहरण 5: सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

- **हल (संक्षेप में):**
  1. माना $\sqrt{3} = a/b$ एक परिमेय संख्या है (जहाँ a, b सह-अभाज्य हैं)।
  2. वर्ग करने पर: $3 = a^2/b^2 \Rightarrow 3b^2 = a^2$। अतः a^2, 3 से विभाज्य है, तो a भी 3 से विभाज्य होगा।
  3. माना $a = 3c$, तो $3b^2 = (3c)^2 \Rightarrow 3b^2 = 9c^2 \Rightarrow b^2 = 3c^2$।
  4. अतः b भी 3 से विभाज्य है।
  5. चूँकि a और b दोनों का उभयनिष्ठ गुणनखंड 3 है, यह हमारी कल्पना का विरोधाभास है। अतः $\sqrt{3}$ अपरिमेय है।

उदाहरण 6: दर्शाइए कि $5 - \sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

- **हल:**

- माना $5 - \sqrt{3} = r$ (एक परिमेय संख्या)।
- इसलिए, $5 - r = \sqrt{3}$।
- चूँकि 5 और r दोनों परिमेय हैं, उनका अंतर $(5 - r)$ भी परिमेय होना चाहिए।
- इसका अर्थ है कि $\sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या है।
- परंतु यह इस तथ्य का विरोधाभास करता है कि $\sqrt{3}$ अपरिमेय है।
- अतः, $5 - \sqrt{3}$ **अपरिमेय** है।

Schorbit