

अध्याय 4: द्विघात समीकरण

विस्तृत अध्ययन नोट्स (Detailed Study Notes - Hindi)

1. द्विघात समीकरण (Quadratic Equation) का परिचय

चर x में एक द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के रूप की होती है, जहाँ a, b, c वास्तविक संख्याएँ हैं और $a \neq 0$ है।

उदाहरण: $2x^2 + x - 300 = 0$, $4x^2 - 3x + 2 = 0$ आदि।

मानक रूप (Standard Form): जब हम $P(x)$ की घातों को घटते क्रम में लिखते हैं, तो प्राप्त समीकरण को द्विघात समीकरण का मानक रूप कहते हैं। यानी, $ax^2 + bx + c = 0$

2. द्विघात समीकरण के मूल (Roots of a Quadratic Equation)

एक वास्तविक संख्या α को द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ का मूल कहते हैं, यदि $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ हो।

हम यह भी कह सकते हैं कि $x = \alpha$, द्विघात समीकरण का एक हल है, या यह कि α , द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ का एक शून्यक (zero) है।

ध्यान दें: एक द्विघात समीकरण के अधिकतम दो वास्तविक मूल हो सकते हैं।

3. द्विघात समीकरण को हल करने की विधियाँ

कक्षा 10 में मुख्य रूप से दो विधियों का अध्ययन किया जाता है:

A. गुणनखंडन विधि (Factorisation Method)

इस विधि में हम मध्य पद bx को दो ऐसे पदों में विभक्त करते हैं जिनका योग b हो और गुणनफल ac (प्रथम और अंतिम पद का गुणनफल) के बराबर हो।

फिर हम सार्व गुणनखंड (common factors) बाहर निकालकर $ax^2 + bx + c = 0$ को दो रैखिक गुणनखंडों $(px + q)(rx + s) = 0$ के रूप में लिखते हैं।

अंत में, प्रत्येक गुणनखंड को शून्य के बराबर रखकर x के दो मान प्राप्त कर लेते हैं।

B. द्विघाती सूत्र (Quadratic Formula) - श्रीधराचार्य सूत्र

यदि $b^2 - 4ac \geq 0$ हो, तो द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल निम्नलिखित सूत्र द्वारा प्राप्त किए जा सकते हैं:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

यह सूत्र 'पूर्ण वर्ग बनाने की विधि' (Completing the square) से व्युत्पन्न (derive) हुआ है।

4. विविक्तकर और मूलों की प्रकृति (Discriminant & Nature of Roots)

द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ में, पद $b^2 - 4ac$ को इसका विविक्तकर (Discriminant) कहते हैं। इसे D से दर्शाया जाता है।

विविक्तकर D समीकरण के मूलों की प्रकृति (स्वभाव) तय करता है:

विविक्तकर का मान	मूलों की प्रकृति (Nature of Roots)	अर्थ
$D = b^2 - 4ac > 0$ (धनात्मक)	दो भिन्न वास्तविक मूल	समीकरण के दो अलग-अलग वास्तविक हल होंगे।
$D = b^2 - 4ac = 0$ (शून्य)	दो बराबर (समान) वास्तविक मूल	समीकरण के दोनों हल एकदम समान होंगे। ($x = -b/2a$)
$D = b^2 - 4ac < 0$ (ऋणात्मक)	कोई वास्तविक मूल नहीं	समीकरण का कोई वास्तविक हल नहीं होगा (मूल काल्पनिक होंगे)।

Chapter 4: Quadratic Equations

Detailed Study Notes (English)

1. Introduction to Quadratic Equations

A quadratic equation in the variable x is an equation of the form $ax^2 + bx + c = 0$, where a, b, c are real numbers and $a \neq 0$.

Examples: $2x^2 + x - 300 = 0$, $4x^2 - 3x + 2 = 0$, etc.

Standard Form: When we write the terms of $P(x)$ in descending order of their degrees, we get the standard form of the equation. That is, $ax^2 + bx + c = 0$.

2. Roots of a Quadratic Equation

A real number α is called a root of the quadratic equation $ax^2 + bx + c = 0$ if $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$.

We also say that $x = \alpha$ is a solution of the quadratic equation, or that α is a zero of the quadratic polynomial $ax^2 + bx + c$.

Note: A quadratic equation can have at most two real roots.

3. Methods of Solving Quadratic Equations

In Class 10, two main methods are studied:

A. Method of Factorisation (Splitting the Middle Term)

In this method, we split the middle term bx into two terms whose sum is b and whose product is equal to ac (product of first and last term).

Then we take out common factors and write $ax^2 + bx + c = 0$ as a product of two linear factors $(px + q)(rx + s) = 0$.

Finally, we equate each factor to zero to find the two values of x .

B. Quadratic Formula

If $b^2 - 4ac \geq 0$, then the roots of the quadratic equation $ax^2 + bx + c = 0$ are given by:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

This formula is derived using the 'method of completing the square'.

4. Discriminant and Nature of Roots

For the quadratic equation $ax^2 + bx + c = 0$, the expression $b^2 - 4ac$ is called its Discriminant. It is denoted by D .

The discriminant D determines the nature of the roots of the equation:

Value of Discriminant	Nature of Roots	Meaning
$D = b^2 - 4ac > 0$ (Positive)	Two distinct real roots	The equation has two different real solutions.
$D = b^2 - 4ac = 0$ (Zero)	Two equal real roots	Both solutions of the equation are exactly the same ($x = -b/2a$).
$D = b^2 - 4ac < 0$ (Negative)	No real roots	The equation does not have any real solution (roots are imaginary).