अध्याय 1: वास्तविक संख्याएँ (Real Numbers) - नोट्स

1. अंकगणित की आधारभूत प्रमेय (Fundamental Theorem of Arithmetic)

प्रत्येक भाज्य संख्या (Composite Number) को अभाज्य संख्याओं (Prime Numbers) के एक गुणनफल के रूप में व्यक्त (गुणनखंडित) किया जा सकता है। यह गुणनखंडन अद्वितीय होता है।

- **भाज्य संख्या:** जिसके 2 से अधिक गुणनखंड हों (जैसे: 4, 6, 8, 9, 10...)।
- **अभाज्य संख्या:** जो केवल 1 और स्वयं से विभाजित हो (जैसे: 2, 3, 5, 7, 11...)।

उदाहरण: 120 का अभाज्य गुणनखंडन:

$$120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1$$

2. HCF और LCM ज्ञात करना (अभाज्य गुणनखंडन विधि)

- **HCF (महत्तम समापवर्तक):** संख्याओं में प्रत्येक उभयनिष्ठ (Common) अभाज्य गुणनखंड की **सबसे छोटी घात** का गुणनफल।
- **LCM (लघुत्तम समापवर्त्य):** संख्याओं में संबद्ध प्रत्येक अभाज्य गुणनखंड की **सबसे बड़ी घात** का गुणनफल।

दो संख्याओं के लिए महत्वपूर्ण सूत्र:

$$\text{HCF}(a, b) \times \text{LCM}(a, b) = a \times b$$

(यानी, दो संख्याओं का गुणनफल उनके HCF और LCM के गुणनफल के बराबर होता है)

उदाहरण: 6 और 20 का HCF और LCM निकालें।

- $6 = 2^1 \times 3^1$
- $20 = 2^2 \times 5^1$
- **HCF:** $2^1 = 2$ (छोटी घात)
- **LCM:** $2^2 \times 3^1 \times 5^1 = 4 \times 3 \times 5 = 60$ (बड़ी घातें)

3. अपरिमेय संख्याओं का पुनर्भ्रमण (Revisiting Irrational Numbers)

ऐसी संख्या जिसे $\frac{p}{q}$ के रूप में नहीं लिखा जा सकता (जहाँ p, q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$।

- **उदाहरण:** $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \pi, 0.101101110 \dots$

प्रमेय (Theorem): यदि p एक अभाज्य संख्या है और p, a^2 को विभाजित करता है, तो \$$p, a$\$ को भी विभाजित करेगा।

सिद्ध करने का तरीका (Contradiction Method):

परीक्षा में अक्सर पूछा जाता है: *"सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।"*

इसमें हम पहले उसे परिमेय मानते हैं और अंत में अपनी कल्पना को गलत सिद्ध कर देते हैं।

4. परिमेय और अपरिमेय संख्याओं का मिश्रण

- एक परिमेय संख्या और एक अपरिमेय संख्या का **योग या अंतर** हमेशा **अपरिमेय** होता है। (जैसे: $3+\sqrt{2}$)
- एक शून्येतर परिमेय संख्या और एक अपरिमेय संख्या का **गुणनफल या भागफल** हमेशा **अपरिमेय** होता है। (जैसे: $3\sqrt{5}$ या $\frac{7}{\sqrt{2}}$)

उदाहरण: सिद्ध कीजिए कि $3+2\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

माना $3+2\sqrt{5}=\frac{a}{b}$ (परिमेय)

$$2\sqrt{5}=\frac{a}{b}-3 \Rightarrow \sqrt{5}=\frac{a-3b}{2b}$$

चूँकि $\frac{a-3b}{2b}$ परिमेय है, इसलिए $\sqrt{5}$ को भी परिमेय होना चाहिए, लेकिन हम जानते हैं कि $\sqrt{5}$ अपरिमेय है। अतः $3+2\sqrt{5}$ अपरिमेय है।